

# Capítulo 1

## Parte I

# Modelación Matemática de Sistemas Físicos

## 1.1 Introducción

En el análisis y diseño de sistemas de control, un paso sumamente importante; es la modelación matemática del proceso físico a ser controlado.

La modelación consiste en la representación mediante una abstracción matemática de una situación física real. Siendo el modelo, la serie de ecuaciones que definen el comportamiento que se desea emular.

El proceso de crear un modelo no es sencillo, y por el contrario en situaciones puede considerarse un proceso complejo y casi infinito que requiere ser acotado. Por ello se debe definir el conjunto de variables que describen las características dinámicas del fenómeno. Por ejemplo, cuando se considera un circuito eléctrico, en éste típicamente las variables de interés.

Las variables que definen las características dinámicas del sistema, están interrelacionadas entre si a través de leyes físicas, las cuales conllevan a la formulación matemática de las ecuaciones del modelo. En todo caso, en función del fenómeno dominante, dentro del interés, el énfasis en el modelado cambia, de modo que el tipo de fenómeno puede llevar al uso de ecuaciones del sistema, lineales o no lineales, variantes o invariantes con el tiempo.

En la realidad la operación de un sistema, obedece a leyes físicas de una complejidad apreciable que resulta ser difícil de manejar; por lo que la caracterización realista del sistema puede requerir de combinación de ecuaciones de diferentes tipos: lineales o no, variantes o invariantes en el tiempo.

Consideraciones prácticas en el dimensionamiento y complejidad del problema deben ser efectuadas a fin de producir un balance entre requerimientos de datos, y dificultad de resolver el problema. En tal sentido, simplificaciones, pueden ser efectuadas en el desarrollo del modelo. Estas suposiciones y simplificaciones, cuando pueden ser efectuadas, llevan a modelos aproximados, cuyo ámbito de validez, debe ser evaluada, y perfectamente respetado. Uno de los supuestos más comunes, es la *linealización del sistema*.

## 1.2 Respuesta Impulsiva

Un mecanismo ampliamente aceptado en los sistemas de control, y que se ha extendido a otras especialidades, para la modelación de los sistemas lineales, es el uso de la *función de transferencia*. La clásica forma de la función de transferencia, efectúa las relaciones entre las variables de entrada-salida del sistema.

Una forma de obtener la función de transferencia de un sistema lineal, es empleando la denominada respuesta impulsiva o *respuesta al impulso*.

Esto se basa en considerar un sistema lineal e invariante en el tiempo, cuya entrada es  $x(t)$ , y la salida es  $y(t)$ . El sistema se puede caracterizar por su respuesta al impulso  $g(t)$ , que se define como la salida del sistema cuando la entrada es un impulso unitario  $\delta(t)$ . Una vez conocida la respuesta ante la entrada de

impulso del sistema lineal, la salida del sistema  $y(t)$  para cualquier entrada  $x(t)$  se puede encontrar mediante la función de transferencia.

En el caso más simple, de un sistema lineal e invariante en el tiempo de una entrada y una salida, la función de transferencia se define como la transformada de Laplace de la respuesta al impulso con todas las condiciones iniciales iguales a cero.

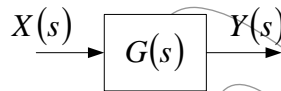
Considere que  $G(s)$  representa la función de transferencia del sistema de una entrada y una salida; siendo  $x(t)$  la entrada y  $y(t)$  la salida, y sea  $g(t)$  la respuesta al impulso. Entonces la función de transferencia de  $G(s)$  se define como:

$$G(s) = L[g(t)]$$

La función de transferencia  $G(s)$  se relaciona con la transformada de Laplace de la entrada y la salida de la siguiente forma:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)}$$

Con todas las condiciones iniciales son supuestas a cero,  $Y(s)$  y  $X(s)$  son las transformadas de Laplace de  $y(t)$  y  $x(t)$  respectivamente.



**Figura 1.1. Diagrama de bloque mostrando la función de transferencia, y señales de entrada y salida**

Pese a que la función de transferencia de un sistema lineal se define en términos de la respuesta impulsiva, en la práctica, la relación entrada-salida, de un sistema lineal e invariante en el tiempo, en tiempo continuo, se describe muy frecuentemente mediante una ecuación diferencial.

Considere que la relación entrada/salida de un sistema lineal invariante con el tiempo se describe mediante la siguiente ecuación diferencial de  $n$ -ésimo orden con coeficientes reales constante:

$$\frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) = b_m \frac{d^m x(t)}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} x(t)}{dt^{m-1}} + \dots + b_1 \frac{dx(t)}{dt} + b_0 x(t) \quad (1.1)$$

En donde los coeficientes de las ecuación:  $a_0, a_1, a_2, \dots, a_{n-1}$ , y  $b_0, b_1, b_2, \dots, b_m$ , son reales.

Cuando la entrada del sistema  $x(t)$  sea especificada ( $t \geq 0$ ), las condiciones iniciales del sistema son conocida, la respuesta del sistema  $y(t)$  para  $t \geq 0$ , puede ser determinada, a partir de la resolución de la ecuación diferencial antes planteada. Sin embargo, este procedimiento puede ser algo consumidor de tiempo, y en etapa de análisis y diseño, resulta ser algo molesto.

Aunque se han desarrollado programas computacionales para efectuar una resolución eficiente de ecuaciones diferenciales, la filosofía básica de la teoría de control lineal es el desarrollo de herramientas de análisis y diseño que eviten la solución exacta de las ecuaciones diferenciales del sistema, excepto en los casos en que se desea las soluciones mediante simulación en computadora para examinar la presentación final del desempeño del sistema.

Para obtener la función de transferencia del sistema lineal invariante en el tiempo, representado por la ecuación (1.1), se debe tomar la transformada de Laplace de ambos lados de la ecuación y se asumen condiciones iniciales igual a cero. De tal modo, que haciendo lo antes descrito resulta:

$$(s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1s + a_0)Y(s) = (b_ms^m + b_{m-1}s^{m+1} + \dots + b_1s + b_0)X(s)$$

De tal modo la función de transferencia es la relación entrada salida en términos de transformada de Laplace:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{b_ms^m + b_{m-1}s^{m+1} + \dots + b_1s + b_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1s + a_0}$$

La función de transferencia es una definición que solo aplica en sistemas líneas e invariantes en el tiempo, y que no esta definida en el caso de los sistemas no lineales. Es importante mencionar que la función de transferencia, relaciona las entradas y salidas del sistema lineal e invariante en el tiempo, en términos de los parámetros del sistema, y es en tal sentido, una propiedad del sistema en sí, independientemente de la entrada o la excitación.

La función de transferencia de un sistema lineal e invariante al tiempo, es un concepto que presenta la dinámica de un sistema de ecuación algebraica, de  $s$ .

La potencia  $s$  más alta en denominador de la función de transferencia es igual al orden del término de la derivada más alta de la salida.

### 1.2.1. Sistema Mecánico de Traslación

En general este sistema consta de resorte, masa y amortiguador, aunque puede presentar estos elementos.

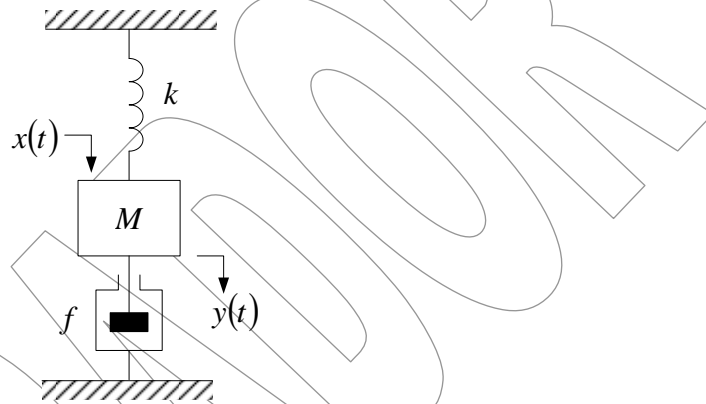


Figura 1.2. Sistema Mecánico de Traslación: Masa-Resorte-Pistón

El amortiguador es un elemento que provee fricción o amortiguamiento. Considere el siguiente sistema:

Se desea obtener la función de transferencia, en donde la entrada  $x(t) = F_{in}$  es la fuerza, y la salida es el desplazamiento  $y(t)$ .

Se procede a plantear la ecuación diferencial que rige el sistema; por la Ley de Newton se conoce:

$$Ma = -F_{resorte} - F_{amortig} - F_{in}$$

Para el caso del resorte se tiene:

$$F_{resorte} = ky(t)$$

Mientras que en el caso del pistón, se tiene que es:

$$F_{piston} = fv = f \frac{dy(t)}{dt}$$

La fuerza de entrada es  $F_{in} = x(t)$ , entonces resulta:

$$M \frac{d^2 y(t)}{dt^2} = -f \frac{dy}{dt} - ky(t) + x(t)$$

Aplicando la transformada de Laplace en la ecuación anterior:

$$L \left[ M \frac{d^2 y(t)}{dt^2} \right] = -L \left[ f \frac{dy}{dt} \right] - L[ky(t)] + L[x(t)]$$

Solo para ser empleado con objetivo de evaluación, o académicos. Prohibido la reproducción total o parcial de este documento.

$$M[s^2Y(s) - sy(0) - y'(0)] = -f[sY(s) - y(0)] - kY(s) + X(s)$$

Si las condiciones iniciales son nulas:  $y(0) = 0$ ,  $y'(0) = 0$ , entonces se tiene:

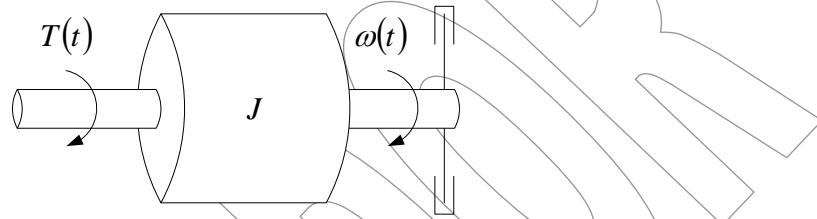
$$M[s^2Y(s)] = -f[sY(s)] - kY(s) + X(s)$$

De tal modo, la función de transferencia del sistema mecánico queda dada por:

$$G(s) = \frac{1}{Ms^2 + fs + k}$$

### 1.2.2. Sistema Mecánico de Rotación

El sistema mecánico de rotación consiste de una carga inercial y un amortiguador viscoso. Este es representado en la siguiente Figura.



**Figura 1.3. Sistema Mecánico de Rotación: Momento de Inercia-Amortiguamiento Viscoso**

En este sistema, se considera que la entrada corresponde al torque  $T(t)$ , que es aplicado y la salida es la velocidad angular  $\omega(t)$ .

El comportamiento dinámico de este sistema mecánico de rotación puede ser modelado por medio de las leyes de Newton aplicada al movimiento circular.

$$J\alpha = \sum T$$

En forma simple dice:

(Momento de inercia)  $\times$  (Aceleración angular) = (sumatoria de los torques)

En este sistema, existe el torque aplicado  $T_{in}(t)$ , y además los torques asociados a la masa  $T_{masa}(t)$ , y el torque asociado al amortiguador  $T_{amortig}(t)$ :

$$T_{in} = T_{masa} + T_{amortig}$$

Considerando la definición de los diferentes torques:

$$T_{masa} = J \frac{d\omega(t)}{dt}$$

$$T_{amortig} = f\omega(t)$$

Siendo  $J$  el momento de inercia del cuerpo giratorio,  $\omega$  su velocidad angular y  $f$  el coeficiente de fricción viscosa.

Ahora se procede a sustituir las respectivas definiciones:

$$T_{in} = J \frac{d\omega(t)}{dt} + f\omega(t)$$

Para obtener la función de transferencia del sistema, se procede a calcular la transformada de Laplace en ambos lados de la ecuación anterior que describe la dinámica.

$$L[T_{in}] = L\left[J \frac{d\omega(t)}{dt}\right] + L[f\omega(t)]$$

Sea, cada una de las transformadas de Laplace:

$$\Omega(s) = L[\omega(t)]$$

$$\tau(s) = L[T(t)]$$

Se tiene que:

$$Js\Omega(s) - \omega(0) + f\Omega(s) = \tau(s)$$

Asumiendo las condiciones iniciales iguales a cero;  $\omega(0) = 0$ , se tiene que:

$$G(s) = \frac{\Omega(s)}{\tau(s)} = \frac{1}{Js + f} \qquad G(s) = \frac{1}{Js + f}$$

### 1.3 Sistema eléctrico de un circuito RLC serie

Sea un circuito RLC serie como el que se muestra en la Figura.

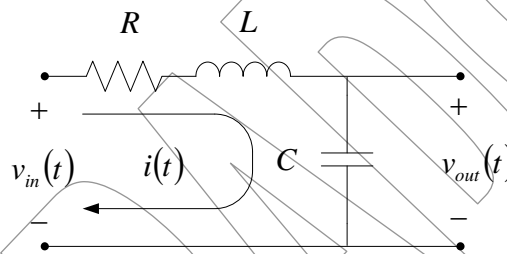


Figura 1.4. Sistema Electrico: Circuito RLC serie

Sea la señal de entrada  $v_{in}(t)$  y  $v_{out}(t)$  el voltaje de salida el cual es medido sobre el capacitor. Se procede a establecer la ecuación que rige el comportamiento dinámico eléctrico de este circuito. Para ello se toma en consideración la Ley de Voltajes de Kirchoff.

$$v_{in}(t) = L \frac{di(t)}{dt} + Ri(t) + \frac{1}{C} \int_0^T i(t) dt$$

$$v_{out}(t) = \frac{1}{C} \int_0^T i(t) dt$$

Aplicando la transformada de Laplace en ambas expresiones, y en ambos lados se tiene, y asumiendo que las condiciones iniciales son cero:

$$L[v_{in}(t)] = L\left[L \frac{di(t)}{dt}\right] + L[Ri(t)] + L\left[\frac{1}{C} \int_0^T i(t) dt\right]$$

$$L[v_{out}(t)] = L\left[\frac{1}{C} \int_0^T i(t) dt\right]$$

De tal modo resulta:

$$V_{in}(s) = LsI(s) + RI(s) + \frac{1}{sC} I(s)$$

$$V_{out}(s) = \frac{1}{sC} I(s)$$

Finalmente queda definida la función de transferencia como:

$$G(s) = \frac{V_{out}(s)}{V_{in}(s)} = \frac{1}{LCs^2 + RCs + 1}$$

## 1.4 Analogías Eléctricas y Mecánicas

Si se realiza una observación detallada entre las ecuaciones diferenciales que rigen el comportamiento de un sistema mecánico y uno eléctrico, se presentan algunas analogías.

**Tabla 1.1. Magnitudes Análogas Fuerza-Voltaje**

| <i>Sistema Mecánico</i>          | <i>Sistema Eléctrico</i>     |
|----------------------------------|------------------------------|
| Fuerza (par)                     | Voltaje                      |
| Masa (momento de inercia)        | Inductancia                  |
| Coefficiente de fricción viscosa | Resistencia                  |
| Coefficiente de resorte          | Recíproco de la capacitancia |
| Desplazamiento                   | Carga                        |
| Velocidad (ángulo)               | Corriente                    |

De modo que no resulta extraño de observar muchos modelos que son resultan equivalentes entre sistemas eléctricos y mecánicos.

**Tabla 1.2. Magnitudes Análogas Fuerza-Corriente**

| <i>Sistema Mecánico</i>          | <i>Sistema Eléctrico</i>    |
|----------------------------------|-----------------------------|
| Fuerza (par)                     | Corriente                   |
| Masa (momento de inercia)        | Capacitancia                |
| Coefficiente de fricción viscosa | Recíproco de la resistencia |
| Coefficiente de resorte          | Recíproco de la inductancia |
| Desplazamiento                   | Enlace de flujo magnético   |
| Velocidad (ángulo)               | Voltaje                     |

### 1.4.1. Ejemplo Sistema Rotacional

Se desea obtener un modelo dinámico para un sistema rotacional desarrollando un diagrama que muestre la dirección de la velocidad angular y la correspondiente expresión para todos los torques. Considerando el sistema rotacional que se describe en la figura siguiente.

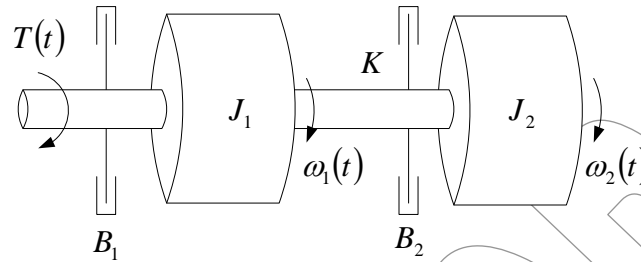


Figura 1.5. Sistema rotacional de varias inercias, y eje flexible

Escribir un conjunto de ecuaciones diferenciales (en términos de las velocidades angulares) que proporcionara un modelo valido para el sistema.

*Solución*

Considerando la suma de los torques, mediante la aplicación de las leyes de Newton para el movimiento rotacional se tiene:

$$T(t) = J_1 \frac{d\omega_1(t)}{dt} + B_1 \omega_1(t) + K \int_0^t [\omega_1(t) - \omega_2(t)] dt + T_s(0)$$

Y

$$0 = J_2 \frac{d\omega_2(t)}{dt} + B_2 \omega_2(t) + K \int_0^t [\omega_2(t) - \omega_1(t)] dt - T_s(0)$$

El valor inicial del torque del resorte en la ecuación anterior muestra el signo menos para ser consistente con el uso del mismo símbolo en la ecuación previa.

### 1.4.2. Ejemplo Sistema de Traslación

Considerando el sistema de la Figura siguiente.

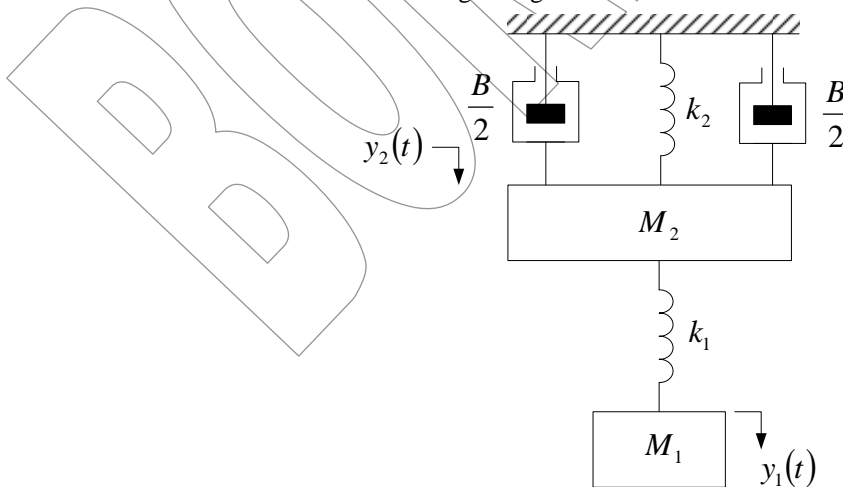


Figura 1.6. Sistema trasnacional de varias masas

Solo para ser empleado con objetivo de evaluación, o académicos. Prohibido la reproducción total o parcial de este documento.

Escribir un conjunto de ecuaciones diferenciales para describir el sistema en términos del desplazamiento  $y_1$  y  $y_2$ . Suponer que  $y_1$  y  $y_2$  son cero en la posición de reposo con todos los resortes y masas incluidos, pero  $f=0$ .

#### Solución

Con las posiciones de referencia determinadas tal como se ha especificado, un desplazamiento inicial del resorte superior produce una fuerza que es igual y opuesta a  $M_1g + M_2g$ , y un desplazamiento inicial del resorte inferior produce una fuerza que compensa a  $M_1g$ . Así, la ecuación se expresa

$$f(t) = M_1 \frac{d^2 y_1(t)}{dt^2} + K_1 [y_1(t) - y_2(t)]$$

$$0 = M_2 \frac{d^2 y_2(t)}{dt^2} + K_1 [y_2(t) - y_1(t)] + K_2 y_2(t) + B \frac{dy_2(t)}{dt}$$

Obsérvese que las fuerzas pasivas se dirigen para oponerse a la dirección del desplazamiento opuesto positivo.

### 1.4.3. Ejemplo Sistema Mecánico de Traslación

Considere el sistema mecánico trasnacional de la siguiente figura, donde se ha supuesto que la superficie es libre de rozamiento.

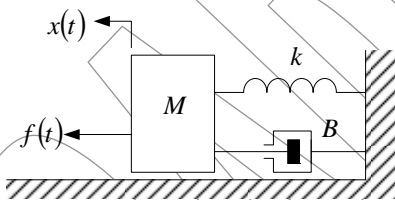


Figura 1.7. Sistema mecánico traslacional

Se construye el diagrama de cuerpo libre, como se muestra a continuación.

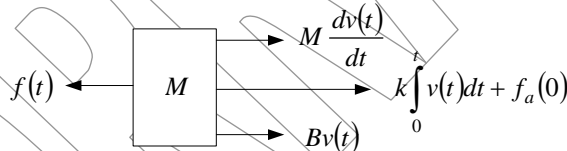


Figura 1.8. Diagrama de cuerpo libre para el sistema mecánico de traslación

Observe que la dirección  $x(t)$  supuesta de las fuerzas producidas por los elementos pasivos se muestran en una dirección opuesta a la velocidad  $v(t)$ , que se ha asumido. La ecuación correspondiente se puede escribir para igualar la fuerza inercial a todas las otras fuerzas o puede ser más simple aplicar un esquema menos rígido. La aplicación del principio de D'Alambert requiere que una suma de todas las fuerzas debe añadirse a cero, y este criterio se modifica fácilmente para decir que la suma de las fuerzas dirigidas a la izquierda debe ser igual a la suma de las fuerzas dirigidas a la derecha. Este enfoque produce una expresión con todos los signos positivos tal que:

$$f(t) = M \frac{dv(t)dt}{dt} + Bv(t) + K \int_0^t v(t)dt + f_s(0)$$

Donde la velocidad  $v(t)$  es la variable dependiente y  $f(t)$  es una fuerza de entrada no especificada.

Cuando se escriben las ecuaciones, una sumatoria de fuerzas que incluye la fuerza inercial se puede interpretar como que representa un equilibrio que es valido para ambas condiciones: estática y dinámica.



### 1.4.4. Ejemplo Sistema Mecánico de Traslación: Varias Masas

Considere un sistema mecánico de dos masas, con acoplamiento a través de resortes y elementos viscosos. Se supone que no hay rozamiento asociado con las superficies. La suma de las fuerzas en ambas masas proporciona dos ecuaciones en términos de dos variables dependientes.

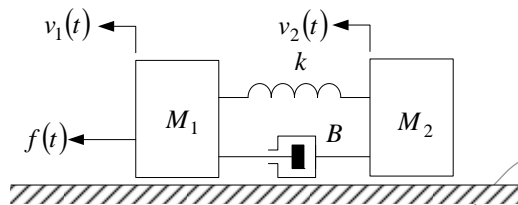


Figura 1.9. Sistema mecánico acoplado

Si el resorte produce una fuerza de carga sobre  $M_1$ , entonces una fuerza igual y opuesta se aplica por  $M_1$  al resorte. La fuerza aplicada al resorte se transmite a través del mismo para aparecer aplicada sobre  $M_2$ , y la amplitud de la deflexión del resorte es proporcional a la fuerza transmitida. La fuerza aplicada al amortiguador viscoso se transmite también a la segunda masa como una fuerza aplicada y la velocidad relativa de las dos masas es proporcional a la fuerza transmitida. En la Figura siguiente se muestra el diagrama de cuerpo libre y las ecuaciones son:

$$f(t) = M_1 \frac{dv_1(t)}{dt} + B[v_1(t) - v_2(t)] + k \int_0^t [v_1(t) - v_2(t)] dt + f_s(0)$$

$$B[v_1(t) - v_2(t)] + k \int_0^t [v_1(t) - v_2(t)] dt + f_s(0) = M_2 \frac{d^2 v_2(t)}{dt^2}$$

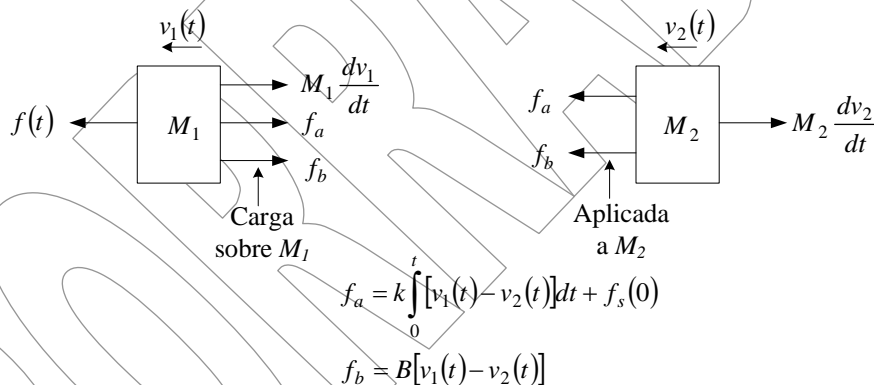


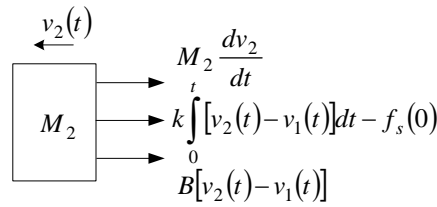
Figura 1.10. Diagrama de cuerpo libre donde se muestran las fuerzas que actúan sobre las masas  $M_1$  y  $M_2$

Una metodología alternativa para sumar las fuerzas se obtiene suponiendo que todos los elementos pasivos proporcionan fuerzas de carga. Esta técnica no cambia la representación de fuerzas sobre el diagrama de cuerpo libre para  $M_1$ , pero cambia la representación sobre el diagrama para  $M_2$ , tal como se muestra en la Figura siguiente.

Todas las fuerzas de carga se muestran oponiéndose a la dirección de velocidad supuesta positiva  $v_2$  y todas tienen un signo positivo en los factores  $v_2$  o  $(v_2 - v_1)$ . La segunda ecuación entonces:

$$0 = M_2 \frac{dv_2(t)}{dt} + B[v_2(t) - v_1(t)] + k \int_0^t [v_2(t) - v_1(t)] dt - f_s(0)$$

Solo para ser empleado con objetivo de evaluación, o académicos. Prohibido la reproducción total o parcial de este documento.



**Figura 1.11. Diagrama de cuerpo libre revisado donde se muestran a todos los elementos pasivos que producen fuerzas de carga**

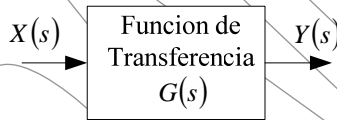
### 1.5 Diagramas de Bloques

El diagrama de un sistema es una representación gráfica de las funciones realizadas por cada componente y el flujo de las señales de tal forma indica las relaciones e interacciones de los componentes.

En un diagrama de bloques todas las variantes del sistema son enlazadas entre si a través de bloques funcionales.

Un bloque funcional es un símbolo de la operación matemática que el bloque produce en la salida, sobre la señal que tienen a la entrada.

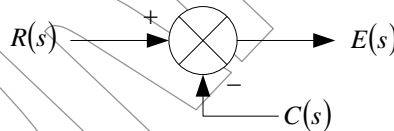
$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{\text{Salida}}{\text{Entrada}}$$



**Figura 1.12. Sistema mecánico traslacional**

#### 1.5.1. Detector de error

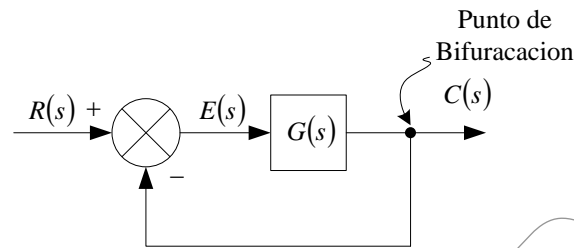
El detector de error produce una señal que es la diferencia de entrada y la señal de realimentación del sistema de control



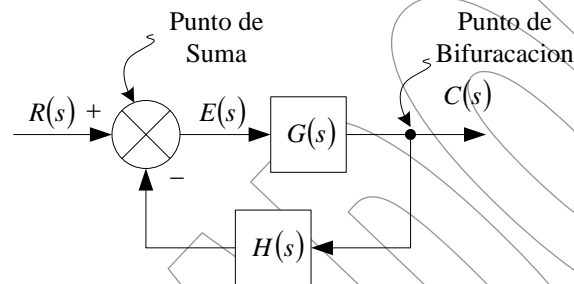
El símbolo positivo o negativo en la punta de la flecha indica si la señal ha de ser sumada o restada.

Solo para ser empleado con objetivo de evaluación, o académicos. Prohibido la reproducción total o parcial de este documento.

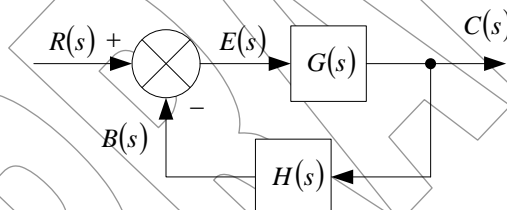
### 1.5.2. Diagrama de Bloque de un Sistema de Control de Lazo Cerrado



Un punto de bifurcación es el punto desde el cual la señal de salida de uno o varios bloques es tomada y desviada hacia el punto de suma.



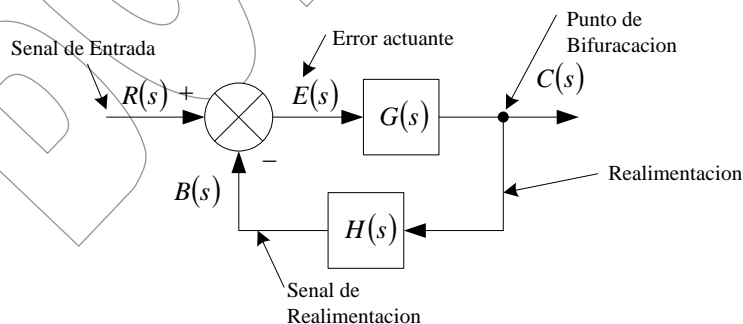
La relación entre la señal de realimentación  $B(s)$  y la señal de error actuante  $E(s)$  se denomina función de transferencia de lazo abierto.



$$\frac{B(s)}{E(s)} = G(s)H(s) = \frac{\text{Señal de Realimentacion}}{\text{Error actuante}} = \text{Funcion de Transferencia de Lazo Abierto}$$

$$\frac{C(s)}{E(s)} = G(s) \text{Funcion de Transferencia de Paso Directo}$$

La relación entre la salida  $C(s)$  y la señal de error actuante  $E(s)$  se denomina función de transferencia.

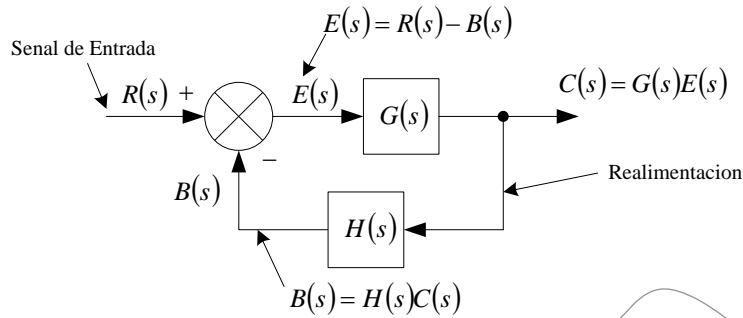


$$C(s) = G(s)E(s)$$

$$E(s) = R(s) - B(s)$$

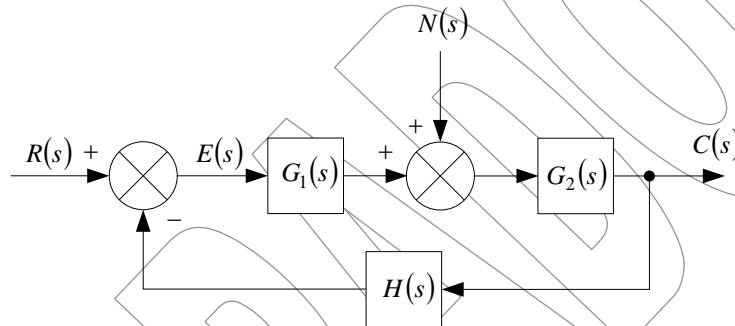
Solo para ser empleado con objetivo de evaluación, o académicos. Prohibido la reproducción total o parcial de este documento.

$$B(s) = H(s)C(s)$$



$$C(s) = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)} R(s)$$

### 1.5.3. Sistema de Lazo Cerrado Sometido a una Perturbación



Quando un sistema lineal están presente dos o mas señales cada entrada puede ser tratada independientemente de la otra u se pueden sumar las salidas correspondientes a cada una de las entradas independientes para obtener la salida total.

Sea  $C_N(s)$  la respuesta producida solo por la perturbación.

$$\frac{C_N(s)}{N(s)} = \frac{G_2(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)H(s)}$$

Por otra parte, sea  $C_R(s)$  la salida debido solamente a la entrada  $R(s)$ .

$$\frac{C_R(s)}{R(s)} = \frac{G_1(s)G_2(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)H(s)}$$

Finalmente, se tiene:  $C(s) = C_R(s) + C_N(s)$

$$C(s) = \frac{G_1(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)H(s)} [G_1(s)R(s) + N(s)]$$

## 1.6 Procedimiento para Trazar Diagramas de Bloque

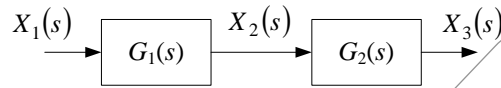
Primero, se escriben las ecuaciones que describen el comportamiento dinámico de cada componente, luego se toman las transformadas de Laplace, suponiendo que las condiciones iniciales son iguales a cero, y se presenta cada ecuación por bloques individuales. Finalmente se juntan los elementos en un diagrama de bloque completo.

## 1.7 Reducción de Diagramas de Bloques

Se pueden conectar los bloques en serie solamente si la salida de un bloque no es afectada por la del bloque siguiente. Si hay efectos de carga entre los componentes, es necesario combinarlos en un bloque único.

Cualquier cantidad de bloques en cascada que representen componentes sin carga puede sustituirse con un solo bloque, cuya función de transferencia sea simplemente el producto de las funciones de transferencia individuales.

La función de transferencia puede ser obtenida eliminando la salida y entrada intermedia.



Por definición de conoce que:

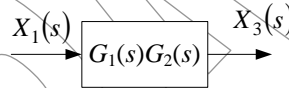
$$G_1(s) = \frac{X_2(s)}{X_1(s)}$$

$$G_2(s) = \frac{X_3(s)}{X_2(s)}$$

De tal modo que se desea estimar una función de transferencia correspondiente a la asociación de los dos bloques en cascada.

$$G(s) = \frac{X_3(s)}{X_1(s)}$$

$$G(s) = G_1(s)G_2(s)$$



En el caso de un diagrama de bloques complicado (como son normalmente lo sistemas reales) que contenga muchos lazos de realimentación, el proceso de simplificación se realiza mediante un reordenamiento paso a paso mediante las reglas del álgebra de los diagramas de bloques.

Algunas de estas reglas importantes aparecen en la Tabla siguiente, sin embargo, todas son simple propiedades de señales que son fácilmente deducibles.

Solo para ser empleado con objetivo de evaluación, o académicos. Prohibido la reproducción total o parcial de este documento.

|   | Diagrama de bloque original | Diagrama de bloques equivalente |
|---|-----------------------------|---------------------------------|
| 1 |                             |                                 |
| 2 |                             |                                 |
| 3 |                             |                                 |
| 4 |                             |                                 |
| 5 |                             |                                 |

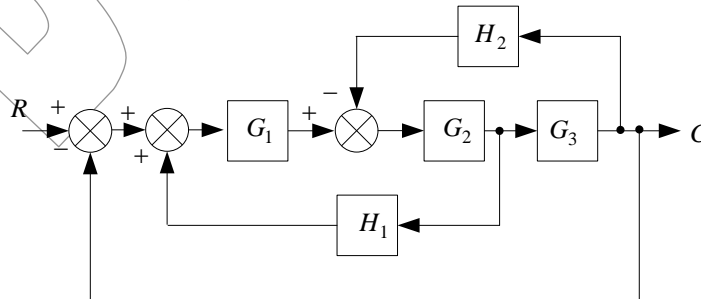
Se pueden representar en un único bloque cualquier cantidad de bloques en cascada que representen componentes que no carga, cuya función de transferencia es simplemente el producto de las funciones de transferencias individuales.

Al simplificar bloques se puede tomar en cuenta:

1. El producto de las funciones de transferencia en la dirección de alimentación directa debe mantenerse constante.
2. El producto de las funciones de transferencia alrededor del lazo debe mantenerse constante.

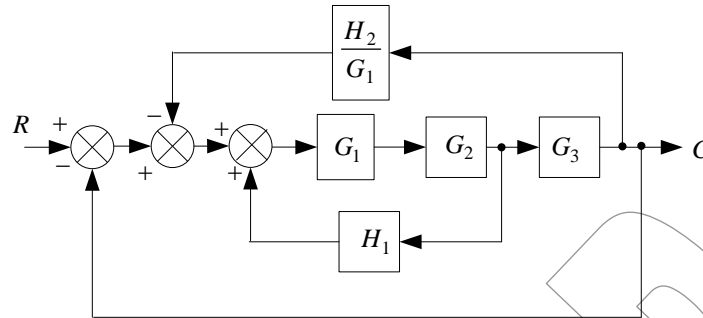
### 1.7.1. Ejemplo de Reducción de Bloques: Tomado de Ogata

Considere el sistema que aparece representado en el siguiente diagrama de bloques.

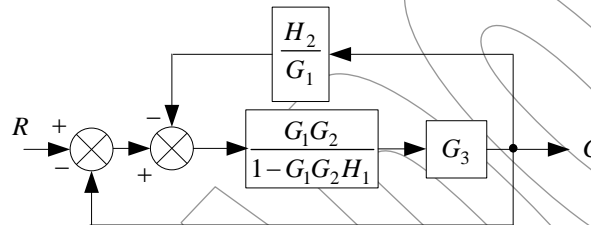


Se desea efectuar la reducción del diagrama de bloques.

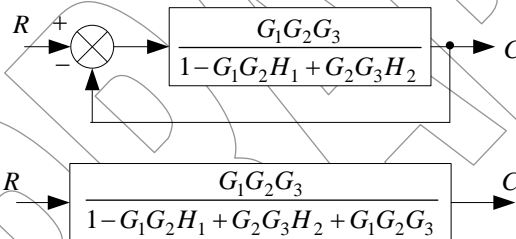
Inicialmente se procede a mover el punto de suma del lazo de realimentación negativa que contiene  $H_2$ , hacia fuera del lazo de realimentación positiva que contiene  $H_1$ .



Se procede a eliminar el lazo de realimentación positiva se obtiene:



La eliminación del lazo que contiene  $H_2/G_1$  produce:



Observe que el numerador de la función de transferencia en lazo cerrado  $C(s)/R(s)$  es el producto de las funciones de transferencia de la trayectoria directa. El denominador de  $C(s)/R(s)$  es igual a:

$$\begin{aligned}
 1 - \sum (\text{producto de las funciones de transferencia alrededor de cada lazo}) \\
 &= 1 - (G_1G_2H_1 - G_2G_3H_2 - G_1G_2G_3) \\
 &= 1 - G_1G_2H_1 + G_2G_3H_2 + G_1G_2G_3
 \end{aligned}$$