Capítulo 3

Respuesta Transitoria de Sistemas Lineales e Invariantes en el Tiempo

3.1 Introducción

Una vez obtenido el modelo de un sistema, existen varios métodos para el *análisis del desempeño* del sistema. En la práctica, la señal de entrada para un sistema de control no se conoce con anticipación, pero es de naturaleza aleatoria, y la entrada instantánea no puede expresarse en forma analítica. Sólo en algunos casos especiales se conoce con anticipación la señal de entrada y se puede expresar en forma analítica o mediante curvas; tal es el caso del control automático de herramientas de corte.

En el análisis y diseño de sistemas de control, se debe tener una base de comparación del desempeño de diversos sistemas de control. Esta base se configura especificando las *señales de entrada de prueba* particulares y comparando las *respuestas* de varios sistemas a estas señales de entrada.

Muchos criterios de diseño se basan en tales señales o en la respuesta del sistema a los cambios en las condiciones iniciales (sin señales de prueba).

El uso de señales de prueba se justifica porque existe una correlación entre las características de respuesta de un sistema para una señal de entrada de prueba común y la capacidad del sistema de manejar las señales de entrada reales.

3.1.1. Señales de prueba típicas

Debido a que rara vez se conoce con anticipación el conjunto completo de señales que pueden entrar a un sistema de control, es común el uso de un conjunto de señales, que son bien conocidas y definidas, y cuya forma permite evaluar algunas características muy particulares del desempeño en el dominio del tiempo del sistema.

Son múltiples las señales de pruebas que se pueden emplear. Las señales de prueba que se usan regularmente son funciones escalón $u(t)$, rampa, parábola, impulso, senoidales, etc.

Con estas señales de prueba, resulta simple efectuar el análisis matemático y/o experimental de los sistemas de control, entre otras características, debido a que son señales son funciones del tiempo muy simples.

Es típico que en el análisis de la respuesta temporal se emplee la forma de la entrada a la que el sistema estará sujeto con mayor frecuencia bajo una operación normal. Esto determina cuál de las señales de entrada típicas se debe usar para analizar las características del sistema.

- *Función Rampa*. Se emplea cuando se supone que las entradas para un sistema de control son funciones del tiempo que cambian en forma gradual.

BORRADOR

Solo para ser empleado con objetivo de evaluación, o académicos. Prohibido la reproducción total o parcial de este documento.

– *Función Escalón*. Es emplea cuando se supone que el un sistema estará sujeto a perturbaciones repentinas.
– *Función Impulso*. Esta señal se prueba es adecuada si se supone que el sistema estará para un sistema sujeto a entradas de choque.

El uso de señales de prueba permite que el diseño de un sistema de control por lo general permita alcanzar un desempeño satisfactorio ante entradas reales. De igual modo, el uso de las señales de prueba es útil, debido a que permite comparar el desempeño de todos los sistemas sobre la misma base.

3.1.2. Respuesta transitoria y respuesta en estado estable.

La respuesta en el tiempo de un sistema de control consta de dos partes: la *respuesta transitoria* y la *respuesta en estado estable*, que es comúnmente denominada respuesta de *régimen estacionario*.

La respuesta transitoria se entiende al comportamiento del sistema que va del estado inicial al estado final.

La respuesta de estado estacionario se refiere a la manera en la cual se comporta la salida del sistema conforme el tiempo, t tiende a infinito ($t \to \infty$).

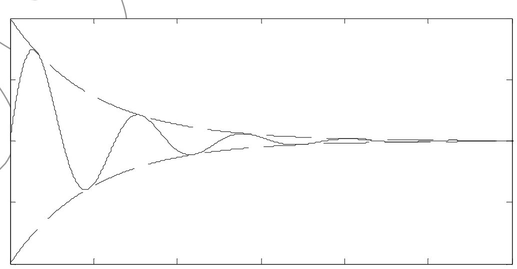
3.1.3. Estabilidad absoluta, estabilidad relativa y error en estado estable

Cuando se efectúa el diseño de un sistema de control, se debe ser capaz de poder predecir el comportamiento dinámico basado en el conocimiento de sus componentes; esto es imperativo, para poder garantizar una operación satisfactoria ante cualquier tipo o condición de excitación.

La característica más importante del comportamiento dinámico de un sistema de control es la *estabilidad absoluta*, es decir, si el sistema es *estable o inestable*.

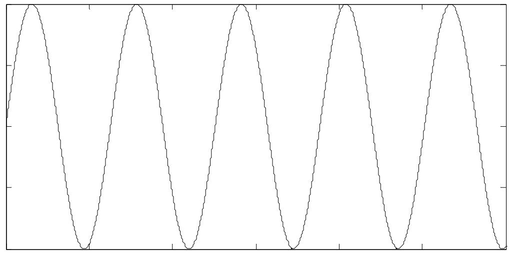
3.1.4. Definiciones

– *Sistema estable*. Un sistema de control está en equilibrio si, en ausencia de cualquier perturbación o entrada, la salida permanece en el mismo estado. Un sistema de control lineal e invariante con el tiempo es estable si la salida termina por regresar a su estado de equilibrio cuando el sistema está sujeto a una condición inicial.
– *Sistema Críticamente Estable*. Es aquel sistema de control lineal e invariante con el tiempo es en que las oscilaciones de la salida continúan para siempre.
– *Sistema Inestable*. Es aquel en el que la salida diverge sin límite a partir de su estado de equilibrio cuando el sistema está sujeto a una condición inicial. En un sistema físico real la salida puede aumentar hasta un cierto punto, pero típicamente la salida es limitada o acotada por “restricciones” mecánicas o bien el sistema puede colapsarse o volverse no lineal después de que la salida excede cierta magnitud, por lo cual ya no se aplican las ecuaciones diferenciales lineales.

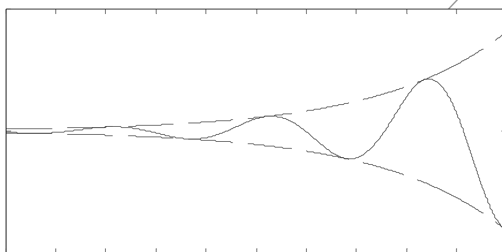


Representación de la Respuesta de un Sistema Estable

Solo para ser empleado con objetivo de evaluación, o académicos. Prohibido la reproducción total o parcial de este documento.



Representación de la Respuesta de un Sistema Críticamente Estable



Representación de la Respuesta de un Sistema Inestable

Figura 1. Diferentes formas de respuesta de un sistema en función de la estabilidad absoluta

Por otra parte, existen otros comportamiento importantes en la respuesta del sistema y que deben recibir una cuidadosa consideración están la *estabilidad relativa* y el *error en estado estable*.

Dado que un sistema de control físico implica un almacenamiento de energía, la salida del sistema, cuando éste está sujeto a una entrada, no sucede a la entrada de inmediato, sino que exhibe una *respuesta transitoria* antes de alcanzar un estado estable.

La típica respuesta transitoria de un sistema de control práctico exhibe oscilaciones amortiguadas antes de alcanzar un estado estable. El estado estable final no necesariamente debe coincidir con el inicial. De hecho, si la salida de un sistema en estado estable no coincide exactamente con la entrada, se dice que el sistema tiene un *error en estado estable*.

Este error es un indicador de la precisión del sistema.

Cuando se efectúa el análisis de un sistema de control, se debe obligatoriamente examinar el comportamiento, tanto en régimen transitorio como en régimen estacionario.

3.2 Sistemas de Primer Orden

Se denomina *sistemas de primer orden* a aquéllos cuya ecuación descriptiva temporal es de primer orden. Estos sistemas utilizan al integrador como bloque básico en el desarrollo de modelos matemáticos de sistemas físicos.

Considere el sistema de primer orden de la Figura siguiente:

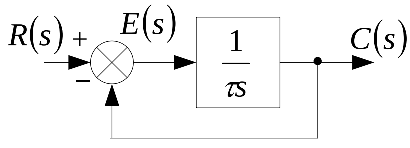


Figura 2. Diagrama de Bloque de un Sistema de Primer Orden

Físicamente, este sistema puede representar un circuito *RC*, un sistema térmico o algo similar.

Solo para ser empleado con objetivo de evaluación, o académicos. Prohibido la reproducción total o parcial de este documento.

En la figura siguiente se efectúa la representación simplificada del diagrama de bloques del sistema de primer orden.

$$R(s) \longrightarrow \boxed{\frac{1}{1+\tau s}} \longrightarrow C(s)$$

Figura 3. Diagrama de Bloque de un Sistema de Primer Orden

La relación entrada-salida $R(s)/C(s)$ se obtiene mediante:

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{1}{\tau s + 1}$$

3.2.1. Respuesta ante un Escalón Unitario

Partiendo de la función de transferencia de un sistema de primer orden, se procede a aplicar un escalon unitario $r(t) = u(t)$ cuya transformada de Laplace es $1/s$. Se procede a sustituir $R(s) = 1/s$ en la función de transferencia y se tiene:

$$C(s) = \frac{1}{\tau s + 1} R(s) = \frac{1}{\tau s + 1} \times \frac{1}{s}$$

Para lograr la respuesta en el tiempo del sistema $c(t)$, se debe aplicar la transformada inversa de Laplace a la expresión anterior, donde resulta pertinente efectuar una expansión en fracciones parciales.

$$C(s) = \frac{1}{s} - \frac{\tau}{\tau s + 1} = \frac{1}{s} - \frac{1}{s + \frac{1}{\tau}}$$

La expresión anterior es susceptible a que se aplique la transformada inversa de Laplace, obteniéndose la respuesta del sistema en el tiempo antes un escalón unitario:

$$c(t) = 1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \qquad \text{para } t \geq 0$$

La ecuación anterior indica que la salida $c(t)$ es inicialmente cero y al final (cuanto $t \to \infty$) se vuelve unitaria. Una característica importante de tal curva de respuesta exponencial $c(t)$ es que, para $t = \tau$, el valor de la respuesta es $c(t{=}\tau) = 0.632$, lo que indica que la respuesta $c(t)$ alcanzó 63.2% de su cambio total. Este resultado se obtiene de sustituir un tiempo $t = \tau$, en la ecuación de la respuesta, $c(t{=}\tau)$

$$c(t = \tau) = 1 - e^{-1} = 0.632$$

Es importante indicar que a medida que la constante de tiempo τ es más pequeña, más rápida es la respuesta del sistema. Otra característica importante de la curva de respuesta exponencial es que la pendiente de la línea de tangente en $t = 0$, es $1/\tau$, dado que:

$$\frac{dc(t)}{dt} = \frac{1}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}} \bigg|_{t=0} = \frac{1}{\tau}$$

La respuesta alcanzaría el valor final en $t = \tau$ si mantuviera su velocidad de respuesta inicial. A partir la ecuación anterior se muestra que la pendiente de la curva de respuesta $c(t)$ disminuye en forma monotónica de $1/\tau$ en $t = 0$ a cero en $t = \infty$.

La curva de respuesta exponencial $c(t)$ es mostrada en la siguiente grafica.

Solo para ser empleado con objetivo de evaluación, o académicos. Prohibido la reproducción total o parcial de este documento.

BORRADOR

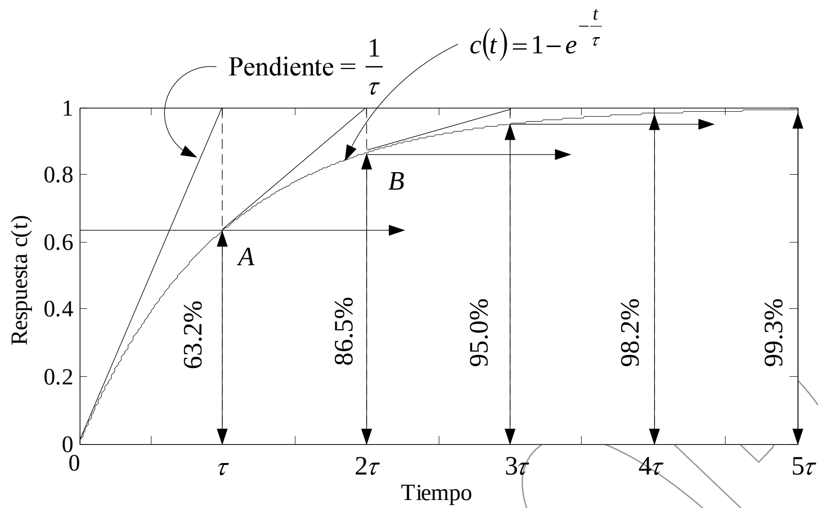


Figura 4. Curva de respuesta exponencial, asociada a la respuesta de un sistema de primer orden ante una entrada de escalón unitario

Para un tiempo igual a una constante de tiempo $t = \tau$, la curva de respuesta exponencial ha ido de 0 a 63.2% del valor final. Cuanto $t = 2\tau$, la respuesta alcanza 86.5% del valor final. Y para $t = 3\tau$, 4τ, 5τ la respuesta alcanza 95, 98.2 y 99.3%, respectivamente, del valor final. Por tanto, para $t = 4\tau$, la respuesta permanece dentro del 2% del valor final.

La ecuación de la respuesta $c(t)$, indica claramente que el estado estable se alcanza matemáticamente sólo después de un tiempo infinito.

Sin embargo, en la práctica, una estimación razonable del tiempo de respuesta es la longitud de tiempo que necesita la curva de respuesta para alcanzar la línea de 2% del valor final, o cuatro constantes de tiempo, $t = 4\tau$.

Un mecanismo para determinar experimentalmente si un sistema es o no de primer orden, se procede a graficar la curva logarítmica $|c(t) - c(\infty)|$ contra el tiempo, en donde $c(t)$ es la salida del sistema, como una función de t. Si la curva se convierte en una línea recta, el sistema es de primer orden.

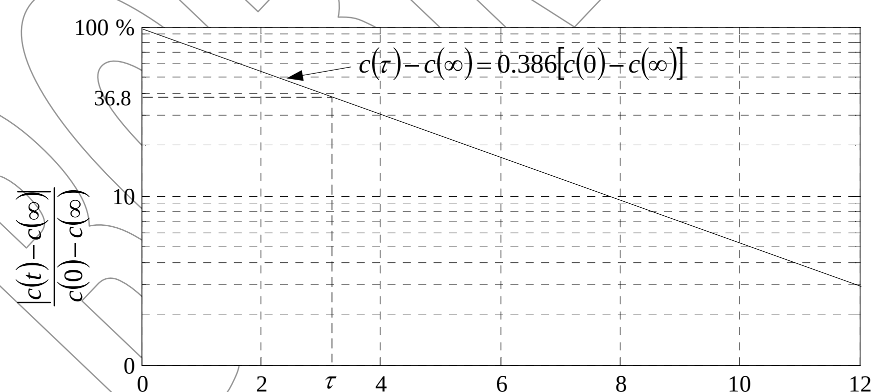


Figura 5. Grafica de $|c(t) - c(\infty)| / |c(t) - c(\infty)|$ contra t en sistema de ejes semi-logarítmico

3.2.2. Respuesta rampa unitaria de sistemas de primer orden

Ahora supóngase que se tiene el sistema de primer orden (Figura 3). Al cual se aplica una rampa unitaria. Dado que la transformada de Laplace de la función rampa unitaria es $1/s^2$, se obtiene la salida del sistema.

Solo para ser empleado con objetivo de evaluación, o académicos. Prohibido la reproducción total o parcial de este documento.

$$C(s) = \frac{1}{\tau s + 1} R(s) = \frac{1}{\tau s + 1} \times \frac{1}{s^2} = \frac{1}{s^2(\tau s + 1)}$$

Se procede a aplicar separación en fracciones parciales:

$$C(s) = \frac{1}{s^2} - \frac{\tau}{s} + \frac{\tau^2}{(\tau s + 1)}$$

Finalmente se obtiene la respuesta en el tiempo, aplicando la transformada inversa de Laplace:

$$c(t) = t - \tau + \tau e^{-\frac{t}{\tau}} \qquad \text{para } t \geq 0$$

En la siguiente figura se muestra la respuesta del sistema de primer orden, ante una entrada del tipo rampa unitaria. Sin embargo, hay que hace notar que la respuesta o salida no coincide plenamente con la entrada o excitación, de modo que existe un error en régimen estacionario.

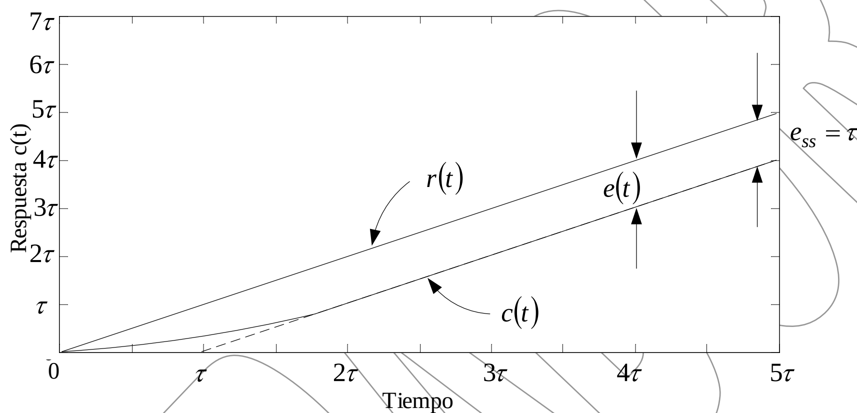


Figura 6. Curva de respuesta de un sistema de primer orden ante una entrada de rampa unitario

En el tiempo, la distancia entre la entrada y salida corresponde al error de estado $e(t)$:

$$e(t) = r(t) - c(t)$$

$$e(t) = \tau\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$$

A medida que el tiempo crece, y tiende a infinito, t $\to\infty$, se obtiene el error de régimen estacionario

$$e_{ss} = \lim_{t\to\infty}[e(t)]$$

$$e_{ss} = \lim_{t\to\infty}\left[\tau\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)\right]$$

$$e_{ss} = e(\infty) = \tau$$

La entrada rampa unitaria y la salida del sistema se muestran en la Figura 6.

El error después de la entrada rampa unitaria es igual a τ para una t suficientemente grande. Entre más pequeña es la constante de tiempo τ, más pequeño es el error en estado estable después de la entrada rampa.

Solo para ser empleado con objetivo de evaluación, o académicos. Prohibido la reproducción total o parcial de este documento.

BORRADOR

3.2.3. Respuesta impulso unitario de sistemas de primer orden

Considere un sistema de primer orden. A este sistema se le aplica una entrada impulso unitario, $r(t) = \delta(t)$, de tal modo la transformada de Laplace resulta ser $R(s) = 1$ y finalmente la salida del sistema puede obtenerse como:

$$C(s) = \frac{1}{\tau s + 1} R(s) = \frac{1}{\tau s + 1} \times 1 = \frac{1}{\tau s + 1}$$

De tal modo que aplicando transformada inversa de Laplace se obtiene:

$$c(t) = \frac{1}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}} \qquad \text{para } t \geq 0$$

La curva de respuesta obtenida mediante la ecuación anterior aparece en la siguiente figura.

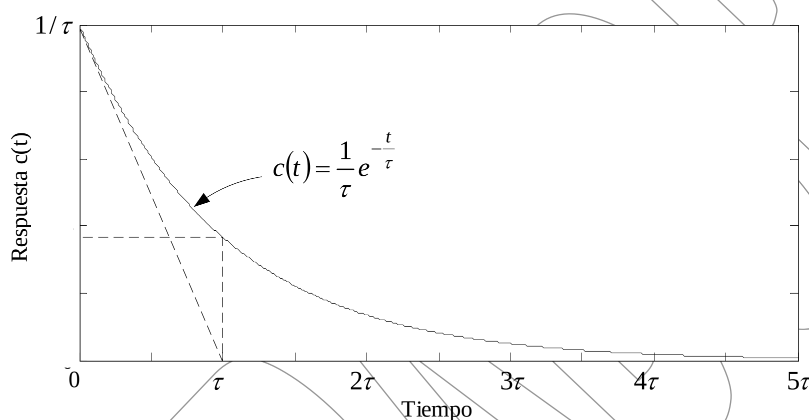


Figura 7. Curva de respuesta de un sistema de primer orden ante una entrada de impulso

3.2.4. Una propiedad importante de los sistemas lineales e invariantes con el tiempo.

En el análisis anterior, se demostró que, para la entrada rampa unitaria, la salida $c(t)$ es:

$$c(t) = t - \tau + \tau e^{-\frac{t}{\tau}} \qquad \text{para } t \geq 0$$

Para la entrada escalón unitario, que es la derivada de la entrada rampa unitaria, la salida.

$$c(t) = 1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \qquad \text{para } t \geq 0$$

Por último, para la entrada impulso unitario, que es la derivada de la entrada escalón unitario,
la salida $c(t)$ es:

$$c(t) = \frac{1}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}} \qquad \text{para } t \geq 0$$

Una propiedad bien interesante resulta al efectuar la comparación de las respuestas del sistema para estas tres entradas (rampa, escalón, impulso) e indica con claridad que la respuesta ala derivada de una señal de entrada se obtiene diferenciando la respuesta del sistema para la señal original. Recuérdese que la derivada de la rampa es el escalón, y la derivada del escalón es el impulso.

Solo para ser empleado con objetivo de evaluación, o académicos. Prohibido la reproducción total o parcial de este documento.

Por otra parte, también se observa que la respuesta para la integral de la señal original se obtiene integrando la respuesta del sistema para la señal original y determinando las constantes de integración a partir de la condición inicial de salida cero.

Lo antes expuesto evidencia una propiedad de los sistemas lineales e invariantes con el tiempo. Aquellos sistemas lineales y variantes con el tiempo y los sistemas no lineales no poseen esta propiedad.

3.3 Sistemas de Segundo Orden

Si bien es cierto que los sistemas de control de segundo orden son raros en la practica, su análisis generalmente ayuda a formar una base para el entendimiento del análisis y diseño de sistemas de ordenes mas altos, especialmente aquellos que pueden aproximarse mediante sistemas de segundo orden.

Considere un sistema de control de segundo orden, con realimentación unitaria como el que se muestra en la Figura 8.

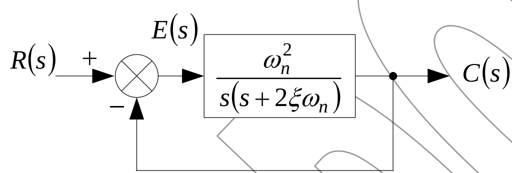


Figura 8. Sistema de Control Prototipo de Segundo Orden

La función de transferencia de lazo abierto es:

$$G(s)=\frac{C(s)}{E(s)}=\frac{\omega_n^2}{s(s+2\xi\omega_n)}$$

Donde ω_n, ξ, son constantes reales. La función de transferencia de lazo cerrado del sistema es:

$$\frac{C(s)}{R(s)}=\frac{\omega_n^2}{s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2}$$

El sistema de la Figura 8, con las funciones de transferencias antes mostradas se definen como *sistema prototipo de segundo orden*.

En la forma canónica de segundo orden:

$$\frac{C(s)}{R(s)}=\frac{\omega_n^2}{s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2}$$

Se tiene que: $\sigma = 2\omega_n\xi$ se denomina *atenuación;* ω_n es la *frecuencia natural no amortiguada y* ξ es el *factor de amortiguamiento relativo* del sistema. El factor de amortiguamiento relativo ξ es el cociente entre amortiguamiento real B y el amortiguamiento crítico B_c,

$$\xi=\frac{B}{B_c}$$

La ecuación característica de la ecuación canónica de segundo orden se obtiene del denominador de la función de transferencia global:

$$\Delta(s)=s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2$$

Solo para ser empleado con objetivo de evaluación, o académicos. Prohibido la reproducción total o parcial de este documento.

En forma general, el comportamiento dinámico del sistema de segundo orden se puede describir en términos de dos parámetros ξ y ω_n. Estos dos parámetros son los que definen la ubicación de los polos de la función de transferencia de lazo cerrado.

De hecho el parámetro ξ, define la ubicación de los polos de la función de transferencia. En este caso las raíces del polinomio característico $\Delta(s)$, son los polos.

- Si $0 < \xi < 1$, los polos en lazo cerrado son complejos conjugados y se encuentran en el semiplano izquierdo del plano s. El sistema, entonces se denomina *subamortiguado* y la respuesta transitoria es *oscilatoria*.
- Si $\xi = 1$, el sistema se denomina *críticamente amortiguado*.
- Si $\xi > 1$ el sistema es sobre amortiguado.
- Si $\xi = 0$, la respuesta transitoria no se amortigua.

La respuesta transitoria de los sistemas críticamente amortiguados y sobre amortiguados no es oscilatoria.

Ahora se desea obtener la respuesta del sistema que aparece en la Figura 9 para una entrada escalón unitario. Se consideran tres casos diferentes: el subamortiguado ($0 < \xi < 1$), el críticamente amortiguado ($\xi = 1$) y el sobreamortiguado ($\xi > 1$).

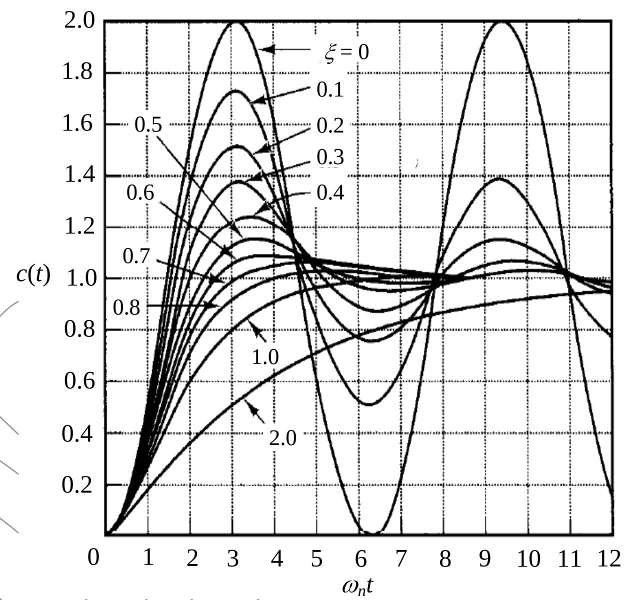


Figura 9. Curvas de respuesta escalón unitario del sistema canónico de segundo orden

Para una entrada de escalón unitario $r(t) = u(t)$, se tiene que la transformada de Laplace es $R(s) = 1/s$, la respuesta del sistema se obtiene tomando la transformada de Laplace de la transformada de la salida.

$$C(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} R(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} \times \frac{1}{s}$$

$$C(s) = \frac{\omega_n^2}{s\left(s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2\right)}$$

Nótese que para obtener la transformada inversa de Laplace de $C(s)$ se debe efectuar una descomposición en fracciones parciales, y lo cual es dominado por las raíces del polinomio característico $\Delta(s)$.

Solo para ser empleado con objetivo de evaluación, o académicos. Prohibido la reproducción total o parcial de este documento.

3.3.1. Caso subamortiguado ($0 < \xi < 1$)

Si el factor de amortiguamiento satisface: $0 < \xi < 1$, entonces las raíces del polinomio característico son complejas conjugadas.

$$s_1, s_2 = -\xi\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\xi^2}$$

$$s_1, s_2 = -\alpha \pm j\omega \qquad \text{donde } \alpha = \xi\omega_n, \quad \omega_d = \omega_n\sqrt{1-\xi^2}$$

De tal modo, que la función de transferencia salida puede ser factorizada de la forma:

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\omega_n^2}{(s+\xi\omega_n + j\omega_d)(s+\xi\omega_n - j\omega_d)}$$

Donde α controla el amortiguamiento del sistema y se conoce como *factor de amortiguamiento* o *constante de amortiguamiento*. El inverso de la constante de amortiguamiento, $1/\alpha$, es proporcional a la constante de tiempo del sistema.

Por su parte $\omega_d = \omega_n\sqrt{1-\xi^2}$ es la frecuencia ω_d se denomina *frecuencia natural amortiguada*.

Para una entrada escalón unitario, la respuesta $C(s)$ se escribe como:

$$C(s) = \frac{\omega_n^2}{s(s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2)}$$

La transformada inversa de Laplace de la ecuación anterior se obtiene con facilidad si $C(s)$ haciendo uso de la separación en fracciones parciales se escribe en la forma siguiente:

$$C(s) = \frac{1}{s} - \frac{s + 2\xi\omega_n}{(s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2)}$$

$$C(s) = \frac{1}{s} - \frac{s+\xi\omega_n}{(s+\xi\omega_n)^2 + \omega_d^2} - \frac{\xi\omega_n}{(s+\xi\omega_n)^2 + \omega_d^2}$$

Se conoce una propiedad interesante:

$$L\left[\frac{s+\xi\omega_n}{(s+\xi\omega_n)^2 + \omega_d^2}\right] = e^{-\xi\omega_n t}\cos\omega_d t$$

$$L\left[\frac{\omega_d}{(s+\xi\omega_n)^2 + \omega_d^2}\right] = e^{-\xi\omega_n t}sen\omega_d t$$

De tal modo que la respuesta del sistema puede ser obtenida por la transformada inversa de Laplace de la ecuación ya establecida y se obtiene como:

$$L[C(s)] = c(t)$$

$$c(t) = 1 - e^{-\xi\omega_n t}\left(\cos\omega_d t + \frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}sen\omega_d t\right)$$

$$c(t) = 1 - \frac{e^{-\xi\omega_n t}}{\sqrt{1-\xi^2}}sen\left(\omega_d t + \tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi}\right)\right) \qquad \text{para } t \geq 0$$

A partir de la ecuación anterior se observa que la frecuencia de oscilación transitoria es la frecuencia natural amortiguada ω_d y que, por tanto, varía con el factor de amortiguamiento relativo ξ.

Solo para ser empleado con objetivo de evaluación, o académicos. Prohibido la reproducción total o parcial de este documento.

BORRADOR

La señal de error para este sistema $e(t)$, es la diferencia entre la entrada y la salida, y es:

$$e(t) = r(t) - c(t)$$

$$e(t) = e^{-\xi\omega_n t}\left(\cos\omega_d t + \frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} sen\omega_d t\right) \qquad \text{para } t \geq 0$$

La señal de error presenta una oscilación senoidal amortiguada; en estado estable, o en $t = \infty$, no existe un error entre la entrada y la salida.

Si el factor de amortiguamiento relativo es igual a cero $\xi = 0$, la respuesta se vuelve no amortiguada y las oscilaciones continúan indefinidamente.

La respuesta $c(t)$ para el caso del amortiguamiento cero se obtiene sustituyendo $\xi=0$ en la ecuación de la respuesta se tiene que:

$$c(t) = 1 - \cos\omega_n t \qquad \text{para } t \geq 0$$

A partir de la ecuación anterior, se establece que ω_n representa la frecuencia natural no amortiguada del sistema.

Es decir, ω_n, es la frecuencia a la cual el sistema oscilaría si el amortiguamiento disminuyera a cero. Si el sistema lineal tiene cualquier cantidad de amortiguamiento, no se puede observar experimentalmente la frecuencia natural no amortiguada.

La frecuencia que se observa es la frecuencia natural amortiguada ω_d, que es igual a ω_n. Esta frecuencia siempre es menor que la frecuencia natural no amortiguada. Un aumento en ξ reduciría la frecuencia natural amortiguada ω_d. Si ξ aumenta más allá de la unidad, la respuesta se vuelve sobreamortiguada y no oscilará.

BORRADOR

Solo para ser empleado con objetivo de evaluación, o académicos. Prohibido la reproducción total o parcial de este documento.