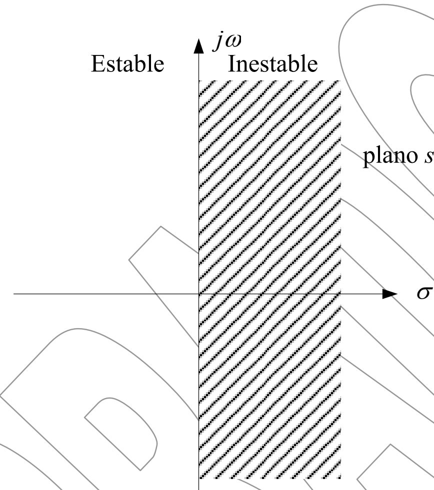
Capítulo 3

Estabilidad en el Plano Complejo

Introducción

La estabilidad de un sistema lineal en lazo cerrado se determina a partir de la ubicación de los polos en lazo cerrado en el plano *s*. *Si alguno de estos polos se encuentra en el semiplano derecho del plano s, entonces conforme aumenta el tiempo, producirá el modo dominante y la respuesta transitoria aumentará en forma monotona u oscilará con una amplitud creciente; en tal sentido el sistema será inestable.*



En éstas condiciones tan pronto como se efectúa la excitación a este sistema, la salida aumenta con el tiempo (en forma divergente). Si en el sistema no posee una característica de saturación o no se incluye un mecanismo seguridad para acotar la salida, el sistema puede terminar por entrar en un comportamiento que puede involucrar potencial daño o falla, dado que la respuesta de un sistema físico real no puede aumentar indefinidamente.

Por ende, en el sistema de control lineal normal no se permiten los polos en lazo cerrado en el semiplano derecho del plano *s*.

Si todos los polos en lazo cerrado se encuentran a la izquierda del eje $j\omega$, cualquier respuesta transitoria termina por alcanzar el equilibrio. Esto representa un sistema estable.

Que un sistema lineal sea estable o inestable es una propiedad del sistema mismo y no depende de la entrada ni de la función de excitación del sistema.

Los polos de la entrada, o de la función de excitación, no afectan la propiedad de estabilidad del sistema, sino sólo contribuyen a los términos de respuesta en estado estable en la solución. Por tanto, el problema de *estabilidad absoluta* se soluciona con facilidad al no elegir polos en lazo cerrado en el semiplano derecho del plano *s*, incluyendo el eje $j\omega$, (Matemáticamente, los polos en lazo cerrado sobre el eje $j\omega$ producirán oscilaciones, cuya amplitud no se reduce ni crece con el tiempo).

Sin embargo, en los casos prácticos en los que hay ruido, la amplitud de las oscilaciones aumenta a una velocidad determinada por el nivel de la potencia del ruido. Por tanto, un sistema de control no debe tener polos en lazo cerrado en el eje $j\omega$).

Observe que el solo hecho de que todos los polos en lazo cerrado se encuentren en el semiplano izquierdo del plano *s* no garantiza características satisfactorias de respuesta transitoria. Si los polos dominantes complejos conjugados en lazo cerrado se encuentran cerca del eje $j\omega$, la respuesta transitoria exhibirá oscilaciones excesivas o será muy lenta. Por tal razón, a fin de garantizar características de respuesta transitoria rápidas y bien amortiguadas, es necesario que los polos en lazo cerrado del sistema se encuentren en una región determinada del plano complejo, tal como la región delimitada por el área sombreada de la Figura 1.

Dado que la estabilidad relativa y el desempeño transitorio de un sistema de control en lazo cerrado se relacionan directamente con el patrón de polos y ceros en lazo cerrado en el plano *s*, con frecuencia es necesario ajustar uno o más parámetros para obtener los patrones convenientes.

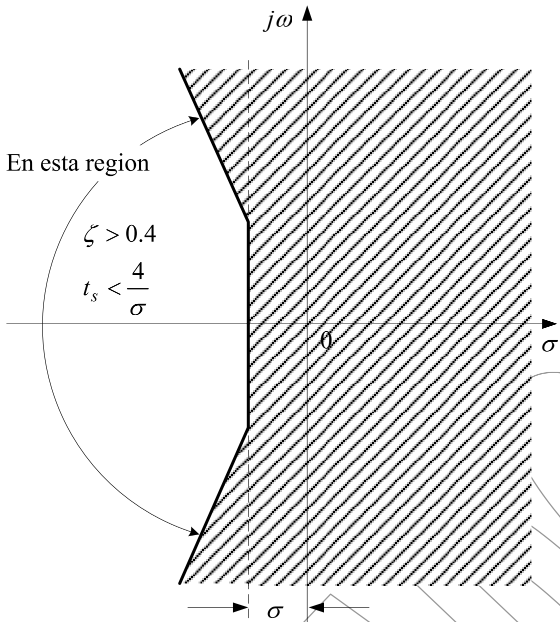


Figura 1. Región del plano complejo que satisface las condiciones $\zeta > 0.4$ y $t_s < 4$1u.

Criterio de Estabilidad de Routh

El problema más importante de los sistemas de control lineal tiene que ver con la estabilidad. Este problema es fundamentalmente responder la pregunta ¿bajo qué condiciones se vuelve inestable un sistema? Y en el caso de que si es inestable, ¿cómo se puede hacer para estabilizarlo?

Como ya se conoce un sistema de control es estable si y sólo si todos los polos en lazo cerrado se encuentran en el semiplano izquierdo del plano *s*. Dado que casi todos los sistemas lineales en lazo cerrado tienen funciones de transferencia en lazo cerrado de la forma:

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \ldots + b_{m-1} s + b_m}{a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \ldots + a_{n-1} s + a_n} = \frac{B(s)}{A(s)}$$

en donde las $\{a_j\}_{j=0}^{n}$ y las $\{b_j\}_{j=0}^{m}$ son constantes y $m < n$, primero se debe factorizar el polinomio *A(s)* para encontrar los polos en lazo cerrado. Un criterio simple, conocido como el *criterio de estabilidad de Routh*, permite determinar la cantidad de polos en lazo cerrado que se encuentran en el semiplano derecho del plano *s* sin tener que factorizar el polinomio.

El criterio de estabilidad de Routh dice si existen o no raíces inestables en una ecuación polinomial, sin tener que obtenerlas en realidad. Este criterio de estabilidad sólo se aplica a los polinomios con una cantidad finita de términos. Cuando se aplica el criterio a un sistema de control, la información acerca de la estabilidad absoluta se obtiene directamente de los coeficientes de la ecuación característica.

El procedimiento en el criterio de estabilidad de Routh es el siguiente:

1. Escribir el polinomio en *s* en la forma siguiente:

$$a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \ldots + a_{n-1} s + a_n = 0 \qquad (1)$$

en donde los coeficientes son cantidades reales. Suponemos que $a_n \neq 0$; es decir, se elimina cualquier raíz cero.

2. Si alguno de los coeficientes es cero o negativo, ante la presencia de al menos un coeficiente positivo, hay una raíz, o raíces imaginarias o que tiene partes reales positivas. En tal caso, el sistema no es estable. Si sólo nos interesa la estabilidad absoluta, no es necesario continuar con el procedimiento. Observe que todos los coeficientes deben ser positivos. Ésta es una

condición necesaria, como se aprecia a partir del argumento siguiente: un polinomio en *s* con coeficientes reales siempre puede factorizarse en factores lineales y cuadráticos tales como $(s + a)$ y $(s^2 + bs + c)$, en donde *a, b* y *c* son números reales. Los factores lineales producen las raíces reales y los factores cuadráticos producen las raíces complejas del polinomio. El factor $(sz + bs + c)$ produce las raíces con partes reales negativas sólo si *b* y *c* son ambas positivas. Para todas las raíces que tienen partes reales negativas, las constantes a, *b, c*,... deben ser positivas en todos los factores. El producto de cualquier cantidad de factores lineales y cuadráticos que contengan sólo coeficientes positivos siempre produce un polinomio con coeficientes positivos. Es importante señalar que la condición de que todos los coeficientes sean positivos no es suficiente para asegurar la estabilidad. La condición necesaria, pero no suficiente, para la estabilidad es que todos los coeficientes de la ecuación (1) estén presentes y tengan un signo positivo. (Si todas las a son negativas, se hacen positivas multiplicando ambos miembros de la ecuación por -1.)

3. Si todos los coeficientes son positivos, ordene los coeficientes del polinomio en renglones y columnas de acuerdo con el patrón o arreglo siguiente:

$$
\begin{array}{lccccccc}
s^n & a_0 & a_2 & a_4 & a_6 & . & . & . \\
s^{n-1} & a_1 & a_3 & a_5 & a_7 & . & . & . \\
s^{n-2} & b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & . & . & . \\
s^{n-3} & c_1 & c_2 & c_3 & c_4 & & & \\
s^{n-4} & d_1 & d_2 & d_3 & d_4 & & & \\
. & . & . & & & & & \\
. & . & . & & & & & \\
. & . & . & & & & & \\
s^2 & e_1 & e_2 & & & & & \\
s^1 & f_1 & & & & & & \\
s^0 & g_1 & & & & & &
\end{array}
$$

Los coeficientes b_1, b_2, b_3, etc., se evalúan del modo siguiente:

$$b_1 = \frac{a_1 a_2 - a_0 a_3}{a_1}$$

$$b_2 = \frac{a_1 a_4 - a_0 a_5}{a_1}$$

$$b_3 = \frac{a_1 a_6 - a_0 a_7}{a_1}$$

$$\vdots$$

La evaluación de las *b* continúa hasta que todas las restantes son cero. Se sigue el mismo patrón de multiplicación cruzada de los coeficientes de los dos renglones anteriores al evaluar las *c*, las *d*, las *e*, etc. Es decir,

$$c_1 = \frac{b_1 a_3 - a_1 b_2}{b_1}$$

$$c_2 = \frac{b_1 a_5 - a_1 b_3}{b_1}$$

$$c_3 = \frac{b_1 a_7 - a_1 b_4}{b_1}$$

$$\vdots$$

$$d_1 = \frac{c_1 b_2 - b_1 c_2}{c_1}$$

$$d_2 = \frac{c_1 b_3 - b_1 c_3}{c_1}$$

Este proceso continúa hasta que se completa el n-ésimo renglón. El arreglo completo de los coeficientes es triangular. Observe que, al desarrollar el arreglo, un renglón completo se divide entre, o se multiplica por, un número positivo para simplificar el cálculo numérico sub-secuente sin alterar la conclusión de la estabilidad.

El criterio de estabilidad de Routh plantea que el número de raíces de la ecuación (1) con partes reales positivas es igual al número de cambios de signo de los coeficientes de la primera columna del arreglo. Debe señalarse que no es necesario conocer los valores exactos de los términos de la primera columna; sólo se necesitan los signos. La condición necesaria y suficiente para que todas las raíces de la ecuación (1) se encuentren en el semiplano izquierdo del plano s es que todos los coeficientes de la ecuación (1) sean positivos y que todos los términos de la primera columna del arreglo tengan signo positivo.

Ejemplo 1.
Aplicar el criterio de estabilidad de Routh al siguiente polinomio de tercer orden:

$$a_0 s^3 + a_1 s^2 + a_2 s + a_3 = 0$$

en donde todos los coeficientes son números positivos. El arreglo de coeficientes se convierte en

$$\begin{array}{lll} s^3 & a_0 & a_2 \\ s^2 & a_1 & a_3 \\ s_1 & \dfrac{a_1 a_2 - a_0 a_3}{a_1} & \\ s^0 & a_3 & \end{array}$$

La condición de que todas las raíces tengan partes reales negativas se obtiene mediante

$$a_1 a_2 > a_0 a_3$$

Ejemplo 2.
Considere el siguiente polinomio:

$$s^4 + 2s^3 + 3s^2 + 4s + 5 = 0$$

Se sigue el procedimiento que se acaba de presentar y se construye el arreglo de coeficientes. (Los primeros dos renglones se obtienen directamente del polinomio dado. Los términos restantes se obtienen de éstos. Si faltan coeficientes en el arreglo, se sustituyen con ceros.)

$$\begin{array}{llll} s^4 & 1 & 3 & 5 \\ s^3 & 2 & 4 & 0 \\ s^2 & 1 & 5 & \\ s^1 & -6 & & \\ s^0 & 5 & & \end{array}$$

$$\begin{array}{llll} s^4 & 1 & 3 & 5 \\ s^3 & \cancel{2} & \cancel{4} & \cancel{0} \\ & 1 & 2 & \\ s^2 & 1 & 5 & \\ s^1 & -3 & & \\ s^0 & 5 & & \end{array}$$

En éste ejemplo, hay dos cambios de signo en los coeficientes de la primera columna. Esto significa que existen dos raíces con partes reales positivas. Observe que el resultado no se modifica cuando los coeficientes de cualquier renglón se multiplican por, o se dividen entre, un número positivo para simplificar el cálculo.

Casos Especiales

Si el término de la primera columna de cualquier renglón es cero, pero los términos restantes no son cero, o no hay términos restantes, el término cero se sustituye con un número positivo muy pequeño ε y se evalúa el resto del arreglo. Por ejemplo, considere la ecuación

$$s^3 + 2s^2 + s + 2 = 0 \qquad (2)$$

El arreglo de coeficientes es

$$\begin{array}{lll} s^3 & 1 & 1 \\ s^2 & 2 & 2 \\ s^1 & 0 \approx \varepsilon & \\ s^0 & 2 & \end{array}$$

Si el signo del coeficiente que está encima del cero (ε) es igual al signo que está abajo de él, quiere decir que hay un par de raíces imaginarias. En realidad, la ecuación (2) tiene dos raíces en $s = \pm j$.

Sin embargo, si el signo del coeficiente que está encima del cero (ε) es opuesto al del que está abajo, quiere decir que hay un cambio de signo. Por ejemplo, para la ecuación:

$$s^3 + 2s^2 + s + 2 = (s-1)^2(s+2) = 0$$

el arreglo de coeficientes es

$$\begin{array}{llll} & s^3 & 1 & -3 \\ \text{Un cambio de signo:} & s^2 & 0 \approx \varepsilon & 2 \\ \text{Un cambio de signo:} & s^1 & -3 - \frac{2}{\varepsilon} & \\ & s^0 & 2 & \end{array}$$

Hay dos cambios de signo en los coeficientes de la primera columna. Esto coincide con el resultado correcto indicado por la forma factorizada de la ecuación polinomial.

Si todos los coeficientes de cualquier renglón son cero significa que existen raíces de igual magnitud que se encuentran radialmente opuestas en el plano s, es decir, dos raíces con magnitudes iguales y signos opuestos y/o dos raíces imaginarias conjugadas. En este caso, la evaluación del resto del arreglo continúa mediante la formación de un polinomio auxiliar con los coeficientes del último renglón y mediante el empleo de los coeficientes de la derivada de este polinomio en el renglón siguiente. Tales raíces con magnitudes iguales y radialmente opuestas en el plano s se encuentran despejando el polinomio auxiliar, que siempre es par. Para un polinomio auxiliar de grado $2n$, existen n pares de raíces iguales y opuestas. Por ejemplo, considere la ecuación:

$$s^5 + 2s^4 + 24s^3 + 48s^2 - 25s - 50 = 0$$

arreglo de coeficientes es

$$\begin{array}{llll} s^5 & 1 & 24 & -25 \\ s^4 & 2 & 48 & -50 \leftarrow \text{Polinomio auxiliar } P(s) \\ s^3 & 0 & 0 & \end{array}$$

Todos los términos del renglón s^3 son cero. Después se forma el polinomio auxiliar a partir de los coeficientes del renglón s^4. El polinomio auxiliar $P(s)$ es:

$$P(s) = 2s^4 + 48s^2 - 50$$

lo cual indica que hay dos pares de raíces de igual magnitud y signo opuesto. Estos pares se obtienen resolviendo la ecuación del polinomio auxiliar $P(s) = 0$. La derivada de $P(s)$ con respecto a s es:

$$\frac{dP(s)}{ds} = 8s^3 + 96s$$

Los coeficientes de la última ecuación, es decir, 8 y 96, sustituyen los términos del renglón s^3. Por consiguiente, el arreglo de coeficientes se convierte en:

s^5	1	24	-25
s^4	2	48	-50
s^3	8	96	← Coeficientes de $dP(s)/ds$
s^2	24	-50	
s^1	2.7	0	
s^0	-50		

Se ve que hay un cambio de signo en la primera columna del arreglo nuevo. Por tanto, la ecuación original tiene una raíz con una parte real positiva. Despejando las raíces de la ecuación del polinomio auxiliar

$$2s^4 + 48s^2 - 50 = 0$$

Se obtiene

$$s^2 = 1,\ s^2 = -25$$

o bien

$$s = \pm 1, \quad s = \pm j5$$

Estos dos pares de raíces son una parte de las raíces de la ecuación original. De hecho, la ecuación original se escribe en forma factorizada del modo siguiente:

$$(s + 1)(s - 1)(s + j5)(s - j5)(s + 2) = 0$$

Análisis de Estabilidad Relativa

El criterio de estabilidad de Routh proporciona la respuesta a la pregunta de la estabilidad absoluta. Esto, en muchos casos prácticos, no es suficiente. Por lo general, se requiere información acerca de la estabilidad relativa del sistema. Un enfoque útil para examinar la estabilidad relativa es cambiar el eje del plano s y aplicar el criterio de estabilidad de Routh.

Es decir, se escribe

$$s = \hat{s} - \sigma$$
$$(\sigma = \text{constante})$$

en la ecuación característica del sistema, se escribe el polinomio en términos de $\hat{s}$, y se aplica el criterio de estabilidad de Routh al nuevo polinomio en s. La cantidad de cambios de signo en la primera columna del arreglo desarrollado para el polinomio en $\hat{s}$ es igual a la cantidad de raíces que se localizan a la derecha de la línea vertical $s = -\sigma$. Por tanto, esta prueba revela la cantidad de raíces que se encuentran a la derecha de la línea vertical $s = -\sigma$.

Aplicación del criterio de estabilidad de Routh al análisis de un sistema de control. El criterio de estabilidad de Routh tiene una utilidad limitada en el análisis de un sistema de control lineal, sobre todo porque no sugiere cómo mejorar la estabilidad relativa ni cómo estabilizar un sistema inestable. Sin embargo, es posible determinar los efectos de cambiar uno o dos parámetros de un sistema si se examinan los valores que producen inestabilidad. A continuación se considera el problema de determinar el rango de estabilidad para el valor de un parámetro.

Considere el sistema de la Figura 2.

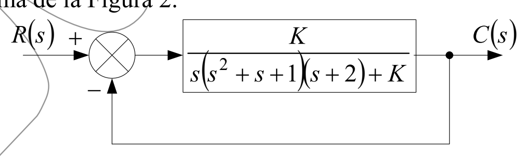


Figura 2. Sistema de Control para analizar la estabilidad relativa

Se desea determinar el rango de valores de K para la estabilidad. La función de transferencia en lazo cerrado es:

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{K}{s(s^2 + s + 1)(s + 2) + K}$$

La ecuación característica es

$$s^4 + 3s^3 + 3s^2 + 2s + K = 0$$

El arreglo de coeficientes se convierte en:

s^4	1	3	K
s^3	3	2	0
s^2	7/3	K	
s^1	2-9/7K		
s^0	K		

Para la estabilidad, K debe ser positiva ($K > 0$), y todos los coeficientes de la primera columna deben serlo también. Por tanto, se debe cumplir:

$$\frac{14}{9} > K > 0$$

Cuando $K = 14/9$, el sistema se vuelve oscilatorio y, matemáticamente, la oscilación se mantiene en una amplitud constante.

Referencias Documentales

[1] Ogata, K., *Ingeniería de Control Moderna*, Prentice Hall, 1980.
[2] Anderson, P.M. & Fuad, A.A. *Power System Control and Stability*. Second Edition. IEEE Press.
[3] Kundur, P. *Power System Stability and Control*. Mc Graw Hill, 1999.