

Respuesta en Frecuencia

Introducción

El término *respuesta en frecuencia* es acuñado al examen que se efectúa a la respuesta de un sistema en estado estable ante una entrada a una señal senoidal. En el análisis de respuesta en frecuencia, la frecuencia de la señal de entrada se hace variar en un cierto rango, para estudiar el comportamiento y las características de la respuesta resultante.

En este capítulo se efectúa una breve y somera discusión y exposición de elementos correspondientes al análisis de la respuesta en frecuencia de sistemas de control lineales e invariantes en el tiempo. En particular se aborda el famoso método gráfico, minado trazado asintótico de Bode; conocido vulgarmente como diagrama de Bode.

Salida en Estado estable para una Entrada Senoidal

Considere un sistema lineal e invariante en el tiempo como el de la Figura 1.

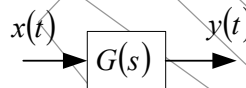


Figura 1. Sistema lineal e invariante con el tiempo

Para este sistema lineal e invariante en el tiempo es caracterizado por la siguiente función de transferencia:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = K \frac{\prod_{j=1}^m (s - z_j)}{\prod_{i=1}^n (s - p_i)}$$

donde por simplicidad se ha supuesto asumido que el sistema tiene polos y ceros reales simples. Interesa determinar la respuesta del sistema a una entrada sinusoidal de la forma:

$$x(t) = X \sin(\omega t)$$

En el dominio transformado es:

$$X(s) = \frac{X\omega}{s^2 + \omega^2}$$

Conociendo la función de transferencia $G(s)$, bajo condiciones iniciales nulas, se tiene:

$$Y(s) = X(s)G(s) = K \frac{\prod_{j=1}^m (s - z_j)}{\prod_{i=1}^n (s - p_i)} X(s)$$

en donde $X(s)$ es la transformada de Laplace de la entrada $x(t)$, ya fue definido.

$$Y(s) = X(s)G(s) = K \frac{\prod_{j=1}^m (s - z_j)}{\prod_{i=1}^n (s - p_i)} \frac{X\omega}{s^2 + \omega^2}$$

Expandiendo en fracciones simples, se tiene:

$$Y(s) = \sum_{i=1}^n \frac{\alpha_i}{s - p_i} + \underbrace{\frac{\alpha_0}{s + j\omega} + \frac{\alpha_0^*}{s - j\omega}}_{(1)}$$

Donde:

$$\alpha_i = \lim_{s \rightarrow p_i} (s - p_i) G(s) \frac{X\omega}{s^2 + \omega^2}$$

$$\alpha_0 = \lim_{s \rightarrow -j\omega} (s + j\omega) G(s) \frac{X\omega}{(s + j\omega)(s - j\omega)}$$

$$\alpha_0 = \frac{X\omega G(-j\omega)}{-2j\omega} = j \frac{X}{2} G(-j\omega)$$

El término (1), resulta:

$$(1) = \frac{\alpha_0(s - j\omega) + \alpha_0^*(s + j\omega)}{s^2 + \omega^2}$$

$$(1) = \frac{s(\alpha_0 + \alpha_0^*) + j\omega(\alpha_0^* - \alpha_0)}{s^2 + \omega^2}$$

$$(1) = \frac{-j \frac{X}{2} [G(j\omega) - G(-j\omega)]s + \frac{X}{2} \omega [G(j\omega) + G(-j\omega)]}{s^2 + \omega^2}$$

Escribiendo se tiene:

$$G(j\omega) = |G(j\omega)| e^{j\phi(\omega)}$$

$$\phi(\omega) = \angle G(j\omega)$$

Resulta:

$$(1) = \frac{-jX|H(j\omega)|s \frac{e^{j\phi(\omega)} - e^{-j\phi(\omega)}}{2} + jX|H(j\omega)|\omega \frac{e^{j\phi(\omega)} + e^{-j\phi(\omega)}}{2}}{s^2 + \omega^2}$$

$$(1) = \frac{X|G(j\omega)|[\text{sen}\phi(\omega)s + \omega \cos\phi(\omega)]}{s^2 + \omega^2}$$

$$(1) = X|G(j\omega)| \left[\frac{s}{s^2 + \omega^2} \text{sen}\phi(\omega) + \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} \cos\phi(\omega) \right]$$

Tomando la Transformada Inversa de Laplace resulta:

$$y(t) = \sum_{i=1}^n \alpha_i e^{p_i t} + X|G(j\omega)| [\cos(\omega t) \text{sen}\phi(\omega) + \text{sen}(\omega t) \cos\phi(\omega)]$$

$$y(t) = \sum_{i=1}^n \alpha_i e^{p_i t} + X|G(j\omega)| \text{sen}(\omega t + \phi(\omega))$$

Asumiendo que el sistema es BIBO¹ estable, entonces se cumple:

$$p_1, p_2, p_3, \dots, p_n < 0$$

¹ Un sistema se dice estable si ante una señal de entrada acotada da una señal de salida acotada. En inglés se dice que el sistema es BIBO.

Y el término de respuesta transitoria:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \alpha_i e^{p_i t} \rightarrow 0$$

Es decir, que cuando el tiempo tiende a infinito ($t \rightarrow \infty$), el sistema alcanza un *régimen permanente senoidal* (RPS) de la forma:

$$y_{RPS}(t) = X |G(j\omega)| \text{sen}(\omega t + \phi(\omega))$$

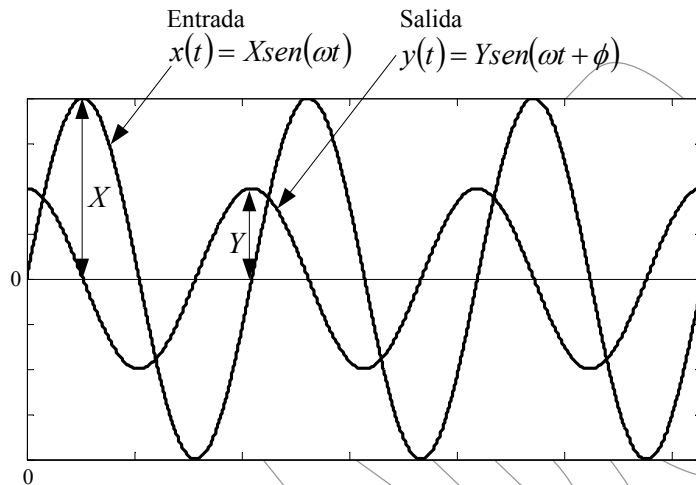


Figura 2. Respuesta en régimen Senoidal Permanente del Sistema Lineal e Invariante en el Tiempo

La salida en régimen senoidal permanente es un seno de la misma frecuencia que el seno de entrada, modificada en amplitud (amplificada o atenuada) por $|G(j\omega)|$ y desfasada un ángulo $\angle G(j\omega)$.

Al término:

$$|G(j\omega)| \equiv G(s)_{s=j\omega}$$

Se le denomina *transferencia armónica* o *respuesta en frecuencia del sistema*.

Su conocimiento para todo ω permite determinar la respuesta en régimen permanente a entradas sinusoidales.

$$\begin{array}{ll} |G(j\omega)| & \text{Amplitud} \\ \angle G(j\omega) & \text{Fase} \end{array}$$

Los resultados se pueden extender al caso de tener polos complejos conjugados y con multiplicidad (con la condición de que sean estables $\Re\{p_j\} < 0$)

A la respuesta en frecuencia $G(j\omega)$ se le suele graficar en diagramas logarítmicos de amplitud y fase que son los denominados *Diagramas de Bode de Amplitud* y *Fase*. Sin embargo, hay otros trazados más para el análisis de la respuesta en frecuencia.

Representación de las Características de la Respuesta en Frecuencia en Forma Gráfica

La función de transferencia senoidal $|G(j\omega)|$, función compleja de la frecuencia ω , queda caracterizada por una magnitud y un ángulo: $|G(j\omega)|$ y $\angle G(j\omega)$, respectivamente: donde la frecuencia ω es un parámetro. Por lo general los ingenieros de control emplean tres formas de representación gráfica de las funciones de transferencia senoidales:

- Trazado de Bode o Trazado logarítmico.
- Trazado de Nyquist o Trazado polar.
- Trazado de magnitud logarítmica versus fase.

Trazado o Diagrama de Bode

El trazado logarítmico corresponde a una representación de la función de transferencia senoidal en la que se consideran dos graficas distintas: una que corresponde al trazado de la magnitud $|G(j\omega)|$ contra la frecuencia ω , y otra que muestra el ángulo de fase $\angle G(j\omega)$, (en grados) contra la frecuencia ω .

El *diagrama de Bode*², por su parte esta conformado por estas dos graficas: una es el logaritmo de la magnitud de una función de transferencia senoidal y la otra es el ángulo de fase. Ambas graficas contra la frecuencia en escala logarítmica.

Factores Básicos

La ventaja del empleo de usar trazados logarítmicos es la facilidad relativa de graficar la curva de respuesta en frecuencia.

Los factores básicos que suelen ocurrir en una función de transferencia arbitraria son:

- Ganancia constante K .
- Factor integral y de derivación $(j\omega)^{\pm 1}$
- Factor de primer orden $(\tau j\omega + 1)^{\pm 1}$
- Factor cuadrático $(1 + 2\zeta(j\omega/\omega_n) + (j\omega/\omega_n)^2)^{\pm 1}$

Ganancia K .

En un sistema de control la ganancia es típicamente una constante K . El valor correspondiente a esta ganancia es un número que puede ir en un amplio margen, desde valores menores a la unidad (atenuación) hasta valores muy superiores a la unidad (amplificación).

Si se considera que:

$$G(j\omega) = K$$

Al ser examinado las características de magnitud y fase se tiene:

$$\begin{aligned} |G(j\omega)| &= |K| \\ \angle G(j\omega) &= \angle K \end{aligned}$$

Para la representación en el trazado de Bode, se considera el trazado de la curva de magnitud logarítmica en dB, siendo de la forma:

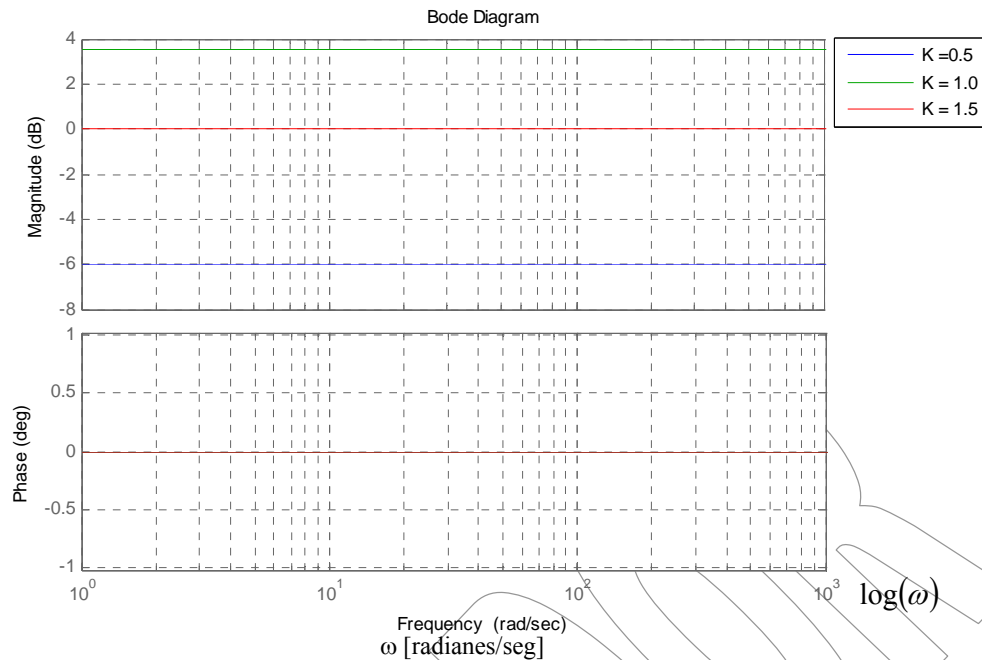
$$|G(j\omega)|_{dB} = 20 \log |K|$$

De lo anterior es fácilmente evidente que si la ganancia es $K < 1$ (atenuación), la ganancia tiene un valor negativo en dB, mientras que si la ganancia es $K > 1$ (amplificación), la ganancia experimenta un valor positivos en dB. Pero cualquiera que sea el caso, es evidente que la magnitud en decibeles es constante e independiente de la frecuencia, de tal modo que la ganancia constante K , es una recta horizontal cuya magnitud es $20 \log K$ dB.

Por otra parte, el ángulo de fase de la ganancia constante es cero $\angle G(j\omega) = 0^\circ$.

Es fácil demostrar que el efecto de variar la ganancia K en la función de transferencia, es simplemente desplazar la curva de magnitud logarítmica de la función de transferencia en la constante correspondiente en dB, sin embargo el cambio en el valor de la ganancia no posee efecto alguno sobre el trazado de la fase.

² *Hendrik Wade Bode*. Ingeniero estadounidense. Profesor en la Escuela Técnica de Harvard, se especializó en sistemas automáticos, campo en el que ha desarrollado interesantes trabajos. El diagrama de Bode es una representación gráfica de la relación entre la frecuencia de la señal de entrada de un sistema automático y la ganancia del mismo para dicha frecuencia, de suma importancia en el diseño de nuevos sistemas automáticos.



Factor integral y de derivación $(j\omega)^{\pm 1}$ (polos y ceros en el origen)

En una forma general un polo o cero en el origen de multiplicidad n , puede ser definido por medio de una función de transferencia de la forma

$$G(j\omega) = (j\omega)^{\pm n}$$

En el caso que n es positivo, se trata de un cero de multiplicidad n y en el caso negativo se trata de un polo de multiplicidad n en el origen. La magnitud logarítmica en decibeles de esta función queda dada por:

$$|G(j\omega)|_{dB} = 20 \log |(j\omega)^{\pm n}|$$

Se conoce que:

$$|(j\omega)^{\pm n}| = \sqrt{[(j\omega)^{\pm n}]^2} \quad |(j\omega)^{\pm n}| = (\omega)^{\pm n}$$

De modo que la magnitud resulta:

$$|G(j\omega)|_{dB} = \pm 20n \log[\omega]$$

La grafica de esta función de la magnitud logarítmica en escala logarítmica de la frecuencia, corresponde a una recta con pendiente $\pm 20n$ db/década.

De manera simple, en el caso de que $n = -1$, se trata de un polo simple en el origen. Se trata de un integrador de la forma $G(s) = 1/s$.

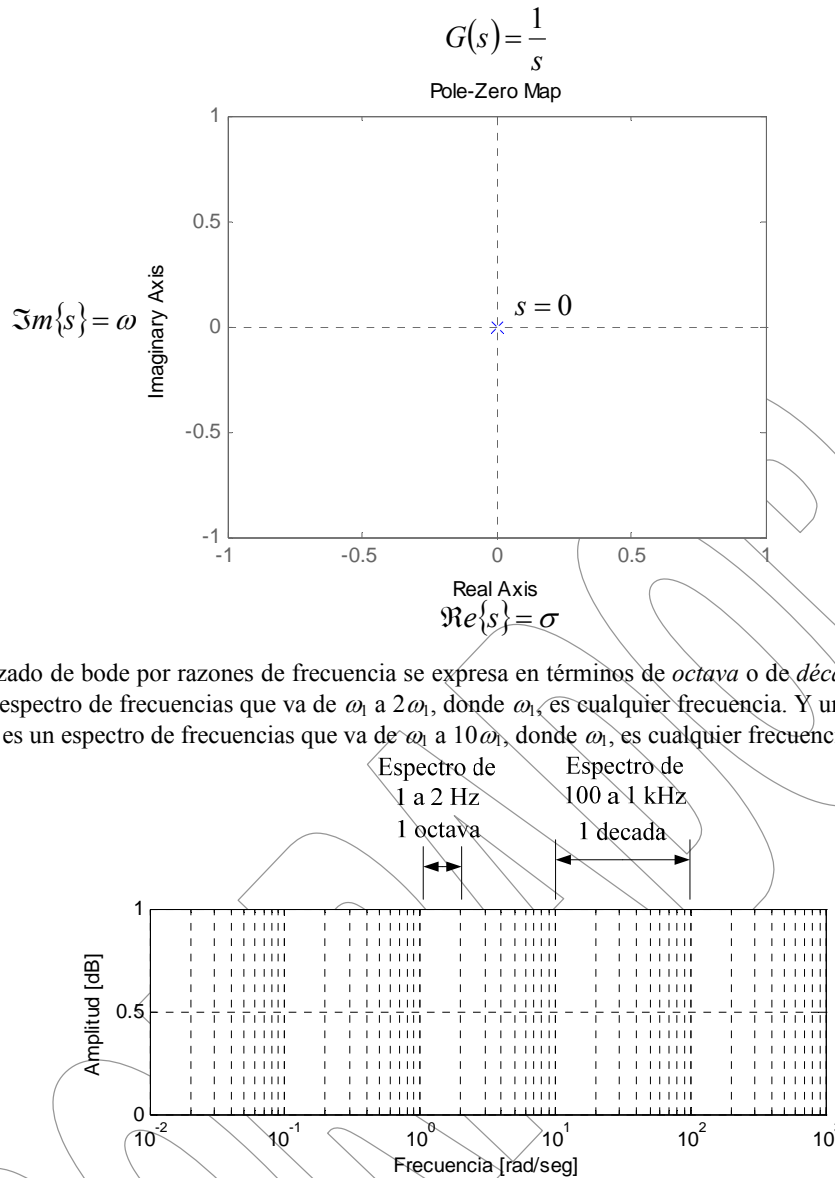


Figura 3. Ejemplo ilustrativo de una década y una octava

En la escala logarítmica del papel semi-logarítmico, cualquier razón de frecuencia determinada se representa mediante la misma distancia horizontal. Por ejemplo la distancia horizontal de $\omega = 1$ a $\omega = 10$ es igual que de $\omega = 3$ a $\omega = 30$.

En el caso particular del integrador simple, la magnitud logarítmica de $|G(j\omega)|_{dB} = -20 \log[\omega]$ contra ω , en una escala logarítmica se obtiene una recta. Para trazar la recta, se ubica primeramente el punto (0 dB, $\omega = 1$ rad/s), ya que:

$$-20 \log[10\omega]_{dB} = -20 \log[\omega] - 20dB$$

La pendiente de la recta es -20 dB/década (o -6dB/octava). Por su parte el argumento o el ángulo de la función de transferencia es constante e igual a -90° .

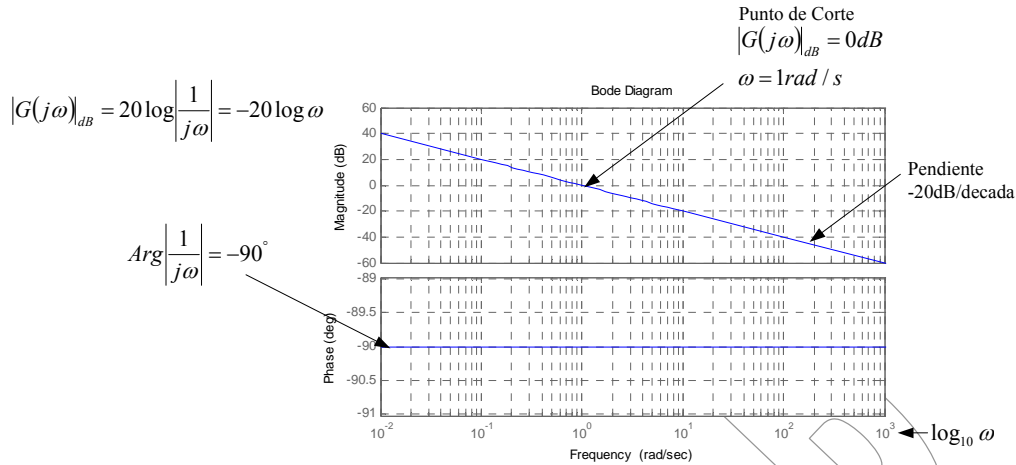


Figura 4. Diagrama de Bode de un integrador simple $G(s) = 1/s^3$

Por su parte en el caso de un cero simple en el origen, $G(s) = 1/s$. Se tiene que la magnitud logarítmica de $j\omega$ en decibeles es:

$$|G(j\omega)|_{dB} = 20 \log |j\omega| = 20 \log \omega$$

Se trata de una pendiente de +20 dB/década o +6dB/octava, y el ángulo es +90°.

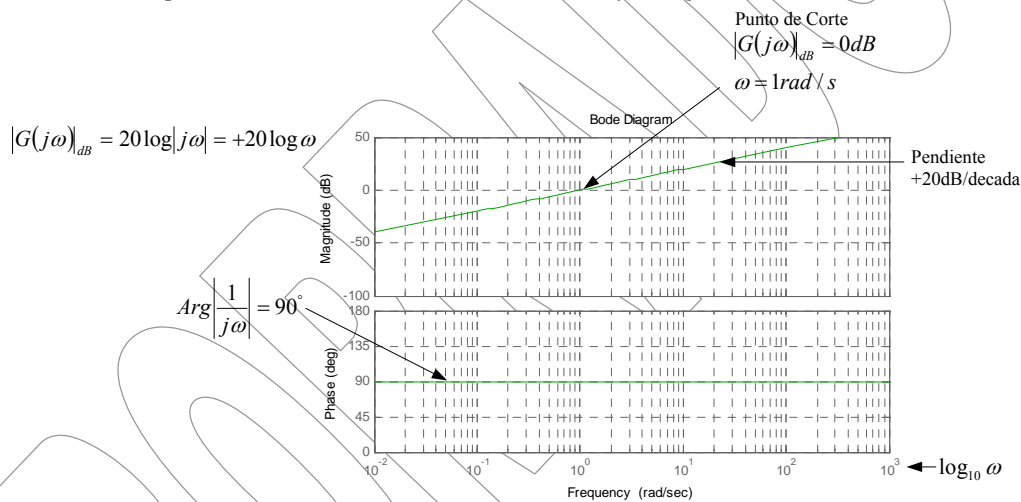


Figura 5. Diagrama de Bode de un derivador simple. $G(s) = s$

Para el caso de polos repetidos, se puede ver que se incrementa la pendiente de la curva junto con el ángulo. En forma general, se tiene que para un polo en el origen de multiplicidad n se cumple:

$$|G(j\omega)|_{dB} = \pm 20n \log[\omega]$$

$$\angle G(j\omega) = \pm 90^\circ n$$

En tal sentido, se tiene que el trazado de logarítmico de la magnitud corresponde a una línea recta que cruza por $\omega = 1$ rad/seg, con una pendiente de $\pm 20n$ dB/década; mientras que la fase es constante a $\pm 90n$ grados: siendo n el orden de multiplicidad del polo o cero.

³ Para este trazado se empleo comandos de Matlab. Los siguientes.

```
>> G = tf([1], [1 0])
>> bode(G)
```

Solo para ser empleado con objetivo de evaluación, o académicos. Prohibido la reproducción total o parcial de este documento. Derechos de Autor Reservados.
 Copyright © 2007. Francisco M. Gonzalez-Longatt. fglongatt@ieec.org

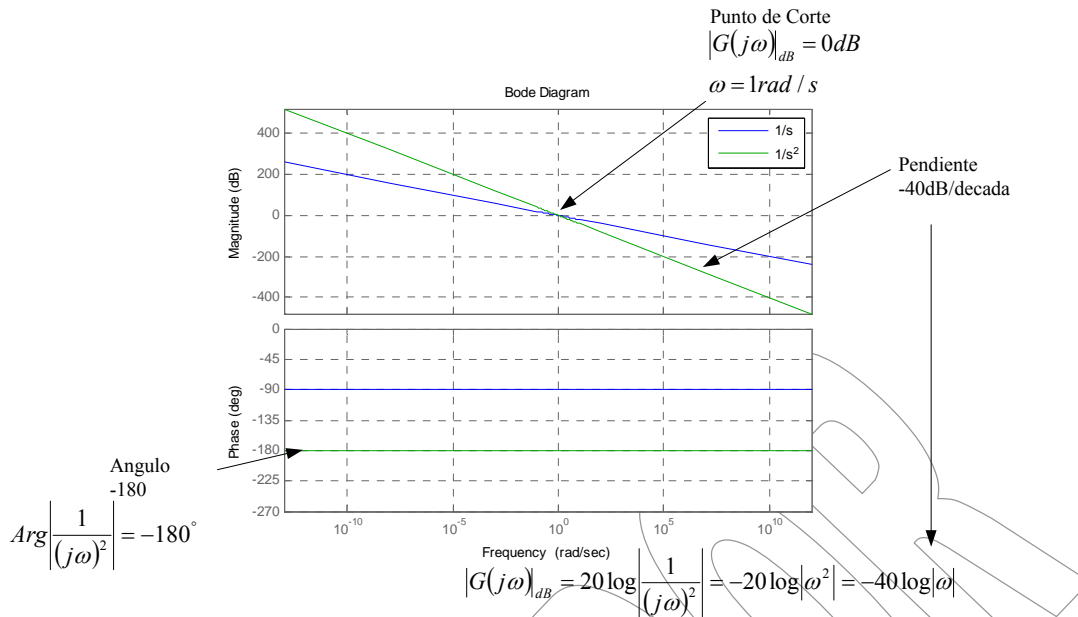


Figura 5. Diagrama de Bode de un Integrador de la forma $G(s)=1/s^n$

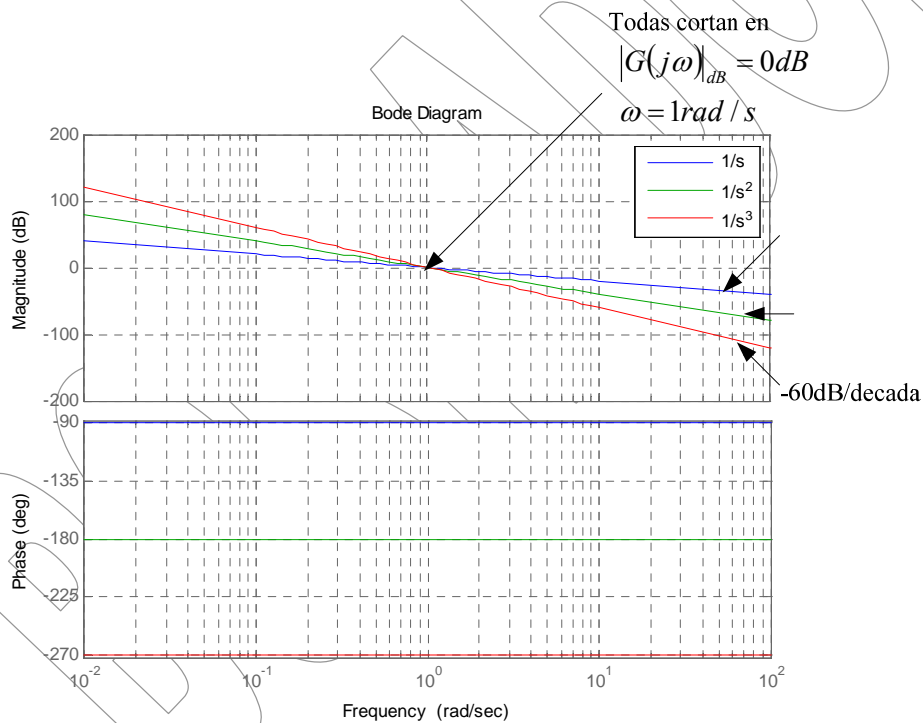


Figura 6. Diagrama de Bode de un Integrador de la forma $G(s)=1/s^n$, $n = 1, 2, 3$.

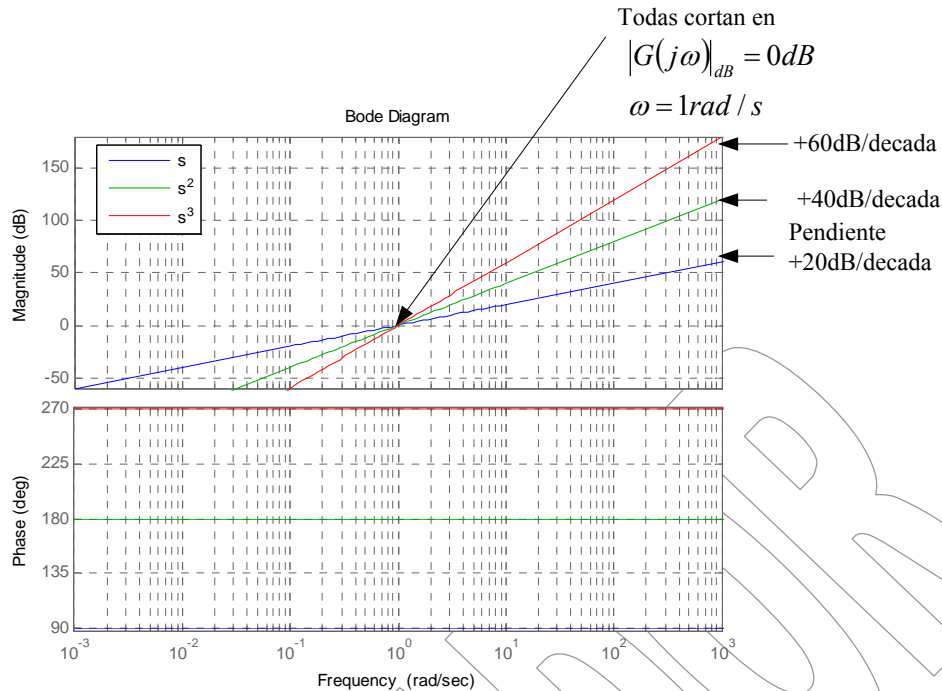


Figura 7. Diagrama de Bode de un Derivador de la forma $G(s) = s^n$, $n = 1, 2, 3$.

Factor de Primer Orden $(1+j\omega\tau)^{\pm 1}$.

La magnitud logarítmica del factor de primer orden $1/(1+j\omega\tau)$ es

$$|G(j\omega)|_{dB} = 20 \log \left| \frac{1}{1+j\omega\tau} \right| = -20 \log \left(\sqrt{1+(\omega\tau)^2} \right) dB$$

Para frecuencias bajas, tales que $\omega \ll 1/\tau$, la magnitud logarítmica se aproxima mediante:

$$|G(j\omega)|_{dB} = -20 \log \left(\sqrt{1+\omega^2\tau^2} \right) dB \cong -20 \log 1 = 0 dB$$

Por tanto, la curva de magnitud logarítmica para frecuencias bajas es la línea 0 dB. Para frecuencias altas, tales que $\omega \gg 1/\tau$,

$$|G(j\omega)|_{dB} = -20 \log \left(\sqrt{1+\omega^2\tau^2} \right) dB \cong -20 \log(\omega\tau) dB$$

Ésta es una expresión aproximada para el rango de altas frecuencias. En $\omega = 1/\tau$, la magnitud logarítmica es igual a 0 dB; en $\omega = 10/\tau$, la magnitud logarítmica es de -20 dB. Por tanto, el valor de $-20 \log(\omega\tau)$ dB disminuye en 20 dB para todas las décadas de ω . De esta forma, Para $\omega \gg 1/\tau$, la curva de magnitud logarítmica es una línea recta con una pendiente de -20 dB/década (o -6 dB/octava).

El análisis efectuado muestra que la representación logarítmica de la curva de respuesta en frecuencia del factor $1/(1+j\omega\tau)$ se aproxima mediante dos asíntotas (líneas rectas), una de las cuales es una recta de 0 dB para el rango de frecuencia $0 < \omega < 1/\tau$ y la otra es una recta con una pendiente de -20 dB/década (o -6 dB/octava) para el rango de frecuencia $1/\tau < \omega < \infty$. La curva de magnitud logarítmica exacta, las asíntotas y la curva de ángulo de fase exacta aparecen en la Figura 8.

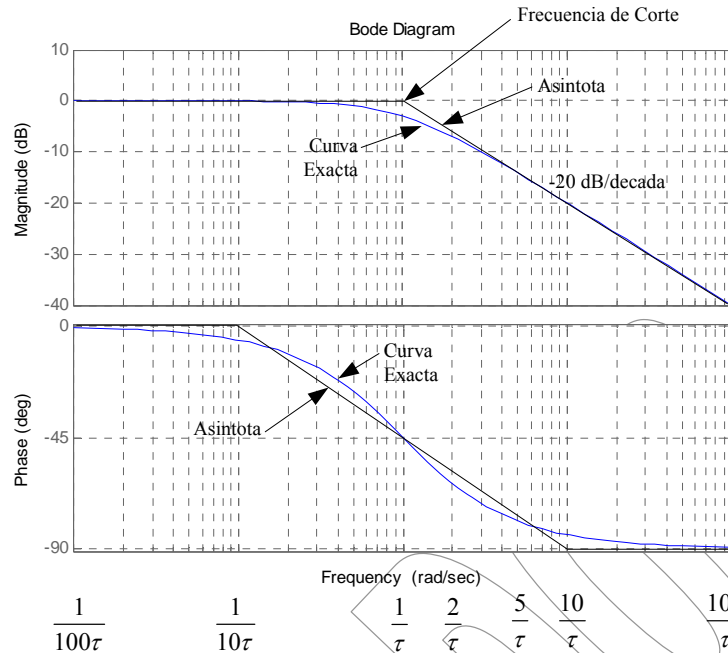


Figura 8. Curva de Magnitud, junto con las asintotas y la curva de ángulo de la función

La frecuencia en la cual las dos asintotas se encuentran se denomina *frecuencia de corte* (aunque Ogata [1] la denomina frecuencia de esquina). Para el factor $1/(1 + j\omega\tau)$, la frecuencia $\omega = 1/\tau$, es la frecuencia de corte, dado que en $\omega = 1/\tau$, ambas asintotas tienen el mismo valor. (La expresión asintótica de baja frecuencia en $\omega = 1/\tau$, es $20\log(1) \text{ dB} = 0 \text{ dB}$ y la expresión asintótica de alta frecuencia en $\omega = 1/\tau$, también es $20\log(1) \text{ dB} = 0 \text{ dB}$) La frecuencia de corte divide la curva de respuesta en frecuencia en dos regiones, una *curva para la región de baja frecuencia* y una *curva para la región de alta frecuencia*. La frecuencia de corte es muy importante cuando se trazan curvas logarítmicas de frecuencia en respuesta.

El ángulo de fase ϕ exacto del factor $1/(1 + j\omega\tau)$, es

$$\phi = -\tan^{-1}(\omega\tau)$$

En una frecuencia cero, el ángulo de fase es 0 grados. En la frecuencia de corte, el ángulo de fase es:

$$\phi = -\tan^{-1}\frac{\tau}{\tau} = -\tan^{-1} 1 = -45^\circ$$

En el infinito, el ángulo de fase se convierte en -90° . Dado que el ángulo de fase se obtiene mediante una función de tangente inversa, el ángulo de fase tiene una pendiente simétrica con respecto al punto de inflexión en $\phi = -45^\circ$. Se puede calcular el error en la curva de magnitud provocado por el uso de las asintotas. El *error máximo ocurre en la frecuencia de corte* y es aproximadamente igual a -3 dB dado que:

$$|G(\omega = 1/\tau)|_{dB} = -20\log(\sqrt{1+1})_{dB} \cong -20\log\sqrt{2} = -3.03 \text{ dB}$$

El error en la frecuencia una octava abajo de la frecuencia de corte, es decir, en $\omega = 1/2\tau$, es:

$$|G(\omega = 1/2\tau)|_{dB} = -20\log\left(\sqrt{\frac{1}{4}+1}\right) + 20\log 1_{dB} \cong -20\log\frac{\sqrt{5}}{2} = -0.97 \text{ dB}$$

El error en la frecuencia una octava arriba de la esquina de frecuencia, es decir, $\omega = 2/\tau$, es

$$|G(\omega = 2/\tau)|_{dB} = -20\log\left(\sqrt{2^2+1}\right) + 20\log 2_{dB} \cong -20\log\frac{\sqrt{5}}{2} = -0.97 \text{ dB}$$

Por tanto, el error en una octava abajo o arriba de la frecuencia de esquina es aproximadamente igual a -1 dB . Asimismo, el error en una década abajo o arriba de la frecuencia de corte es aproximadamente -0.04 dB . El error en decibeles implícito al usar la expresión asintótica para la curva de respuesta en frecuencia de $1/(1 + j\omega\tau)$, aparece en la Figura 9. El error es simétrico con respecto a la frecuencia de corte.

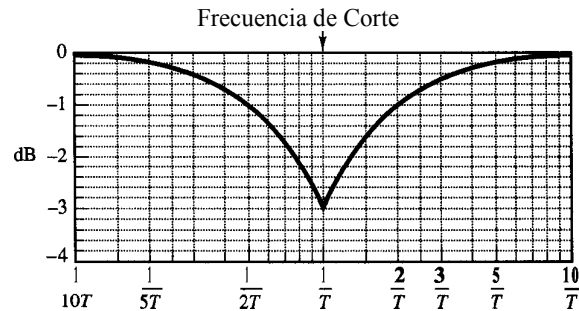


Figura 9. Error de magnitud logarítmica en la expresión asintótica de la curva de respuesta en frecuencia de $1/(1 + j\omega\tau)$.

Dado que *las asíntotas se trazan con facilidad* y están suficientemente cerca de la curva exacta, su uso es conveniente para dibujar el diagrama de Bode con el fin de establecer con rapidez y con un mínimo de cálculos la naturaleza general de las características de la respuesta en frecuencia, y significa una ayuda en gran parte del trabajo de diseño preliminar.

Se puede observar que al variar la constante de tiempo τ mueve la frecuencia de corte, aunque las formas de las curvas de magnitud logarítmica y de ángulo de fase no cambian.

La función de transferencia $1/(1 + j\omega\tau)$ tiene la característica de un *filtro paso-bajo*. Para frecuencias arriba de $\omega = 1/\tau$, la magnitud logarítmica disminuye rápidamente hacia $-\infty$. Esto se debe, en esencia, a la presencia de la constante de tiempo. En el filtro pasa bajo, la salida sigue fielmente una entrada senoidal a frecuencias bajas.

Pero, conforme aumenta la frecuencia de entrada, la salida no puede seguir la entrada debido a que se requiere de cierta cantidad de tiempo para que el sistema aumente en magnitud. Por tanto, para frecuencias altas, la amplitud de la salida tiende a cero y el ángulo de fase de la salida tiende a -90° . En este caso, si la función de entrada contiene muchos armónicos, los componentes de baja frecuencia se reproducen fielmente en la salida, en tanto que los componentes de alta frecuencia se atenúan en amplitud y cambian en fase. Por tanto, un elemento de primer orden produce una duplicación exacta, o casi exacta, sólo para fenómenos constantes o que varían lentamente.

Una ventaja de las trazas de Bode es que, para factores recíprocos, por ejemplo, el factor $(1 + j\omega\tau)$, las curvas de magnitud logarítmica y de ángulo de fase sólo necesita cambiar de signo. Dado que:

$$|G(j\omega)|_{dB} = 20 \log|1 + j\omega\tau| = -20 \log \left| \frac{1}{1 + j\omega\tau} \right|_{dB}$$

$$\angle G(j\omega) = \tan^{-1} \omega\tau = -\angle \left(\frac{1}{1 + j\omega\tau} \right)$$

la frecuencia de esquina es igual para ambos casos. La pendiente de la asíntota de alta frecuencia de $(1 + j\omega\tau)$ es 20 dB/década, y el ángulo de fase varía de 0° a 90° conforme la frecuencia ω se incrementa de cero a infinito. La curva de magnitud logarítmica, junto con las asíntotas y la curva del ángulo de fase para el factor $(1 + j\omega\tau)$, aparece en la Figura 10.

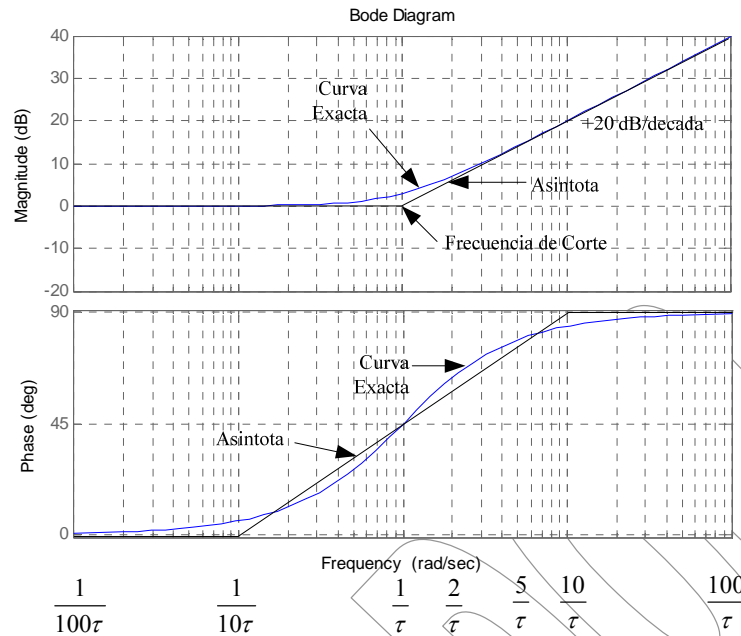


Figura 10. Curva de magnitud logarítmica, asintotas y curva de ángulo de fase para $(1 + j\omega\tau)^{\pm 1}$

La forma de las curvas del ángulo de fase es la misma para cualquier factor de la forma $(1 + j\omega\tau)^{\pm 1}$. Por tanto, es conveniente tener una plantilla para la curva de ángulo de fase. Esta plantilla puede usarse repetidas veces para construir curvas de ángulo de fase para cualquier función de la forma $(1 + j\omega\tau)^{\pm 1}$. Si no se cuenta con dicha plantilla, será necesario localizar varios puntos sobre la curva. Los ángulos de fase de $(1 + j\omega\tau)^{\pm 1}$ son:

$$\begin{aligned} \mp 45^\circ & \text{ en } \omega = \frac{1}{\tau} \\ \mp 26.6^\circ & \text{ en } \omega = \frac{1}{2\tau} \\ \mp 5.7^\circ & \text{ en } \omega = \frac{1}{10\tau} \\ \mp 63.4^\circ & \text{ en } \omega = \frac{2}{\tau} \\ \mp 84.3^\circ & \text{ en } \omega = \frac{10}{\tau} \end{aligned}$$

Para el caso en el que una función de transferencia determinada contiene términos como $(1 + j\omega\tau)^{\pm n}$, se hace una construcción asintótica similar. La frecuencia de corte está todavía en $\omega = 1/\tau$, y las asintotas son rectas. La asintota de frecuencia baja es una recta horizontal en 0 dB, en tanto que la asintota de frecuencia alta tiene la pendiente de $-20n$ década o $20n$ dB/década. El error implícito en las ecuaciones asintóticas es n veces el que existe para $(1 + j\omega\tau)^{\pm 1}$. El ángulo de fase es n veces el de $(1 + j\omega\tau)^{\pm 1}$, en cada punto de frecuencia.

Factores de Segundo Orden $[1+2\xi(j\omega/\omega_n) + (j\omega/\omega_n)^2]^{-1}$.

Los sistemas de control suelen poseer sistemas de segundo orden de la forma:

$$G(j\omega) = \frac{1}{1 + 2\xi\left(\frac{j\omega}{\omega_n}\right) + \left(\frac{j\omega}{\omega_n}\right)^2}$$

Si $\xi > 1$, este factor cuadrático se expresa como un producto de dos factores de primer orden con polos reales (de modo que carece de interés su estudio). Si $0 < \xi < 1$, este factor cuadrático es el producto de dos factores complejos conjugados. Las aproximaciones asintóticas para las curvas de respuesta en frecuencia no son precisas para un factor con valores bajos de ξ . Esto se debe a que la magnitud y la fase del factor cuadrático dependen de la frecuencia de esquina y del factor de amortiguamiento relativo ξ . La curva que representa la asintota de la respuesta en frecuencia se obtiene de la siguiente forma, dado que:

$$|G(j\omega)|_{dB} = 20 \log \left| \frac{1}{1 + 2\xi\left(\frac{j\omega}{\omega_n}\right) + \left(\frac{j\omega}{\omega_n}\right)^2} \right| = -20 \log \sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2 + \left(2\xi\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}$$

para frecuencias bajas tales que $\omega \ll \omega_n$, la magnitud logarítmica se convierte en:

$$-20 \log 1 = 0 \text{ dB}$$

Por tanto, la asintota de baja frecuencia es una recta horizontal en 0 dB. Para altas frecuencias, $\omega \gg \omega_n$, la magnitud logarítmica se vuelve:

$$-20 \log \left(\frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right) = -40 \log \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right) \text{ dB}$$

La ecuación para la asintota de alta frecuencia es una recta con pendiente de -40 dB/década, dado que:

$$-40 \log \left(\frac{10\omega}{\omega_n}\right) = -40 - 40 \log \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right) \text{ dB}$$

La asintota de alta frecuencia interseca la de baja frecuencia en la frecuencia de corte $\omega = \omega_n$, dado que en esta frecuencia:

$$-40 \log \left(\frac{10\omega_n}{\omega_n}\right) = -40 \log(10) \text{ dB} = 0 \text{ dB}$$

Las dos asintotas que han sido determinadas en los pasos anteriores son independientes del valor de ξ . Cerca de la frecuencia $\omega = \omega_n$ ocurre un *pico de resonancia*, tal como se espera de que ocurra en la función:

$$G(j\omega) = \frac{1}{1 + 2\xi\left(\frac{j\omega}{\omega_n}\right) + \left(\frac{j\omega}{\omega_n}\right)^2}$$

El factor de amortiguamiento relativo ξ determina la magnitud de este pico de resonancia. Es claro que la aproximación mediante las asintotas produce ciertos errores. La magnitud del error depende del valor de del coeficiente de amortiguamiento ξ . Para valores pequeños de éste (ξ), es grande el error. La Figura 11 muestra las curvas exactas de magnitud logarítmica junto con las asintotas y las curvas exactas de ángulo de fase para el factor cuadrático obtenido mediante $G(j\omega)$ con varios valores de ξ .

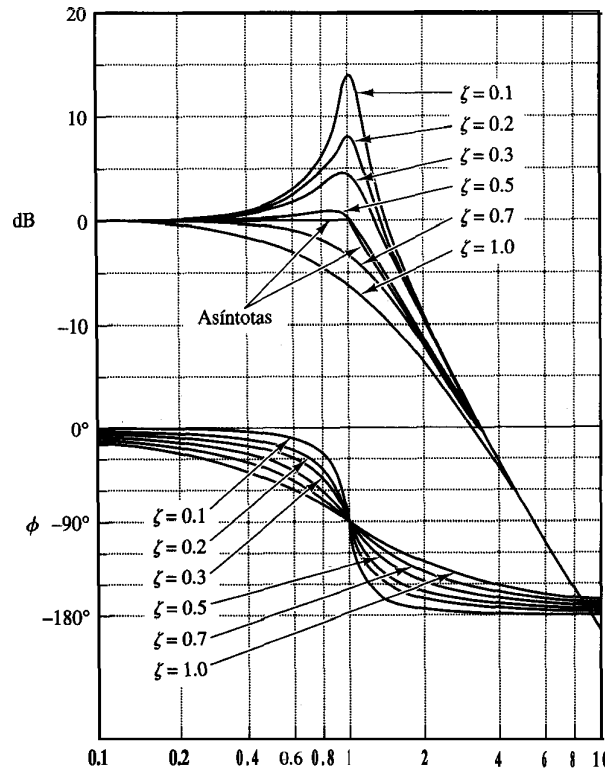


Figura 11. Curvas de magnitud logarítmica, asíntotas y curvas de ángulo de fase del factor cuadrático $G(j\omega)=[1+2\xi(j\omega/\omega_n)+(j\omega/\omega_n)^2]^{-1}$

Si se desea hacer correcciones en las curvas asíntóticas, las cantidades necesarias de corrección en un número suficiente de puntos de frecuencia se obtienen de la Figura 11. El ángulo de fase del factor cuadrático $[1+2\xi(j\omega/\omega_n)+(j\omega/\omega_n)^2]^{-1}$, es:

$$\phi = \angle \frac{1}{1 + 2\xi \left(j \frac{\omega}{\omega_n} \right) + \left(j \frac{\omega}{\omega_n} \right)^2} = -\tan^{-1} \left[\frac{2\xi \frac{\omega}{\omega_n}}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n} \right)^2} \right]$$

El ángulo de fase es una función de la frecuencia ω y del amortiguamiento ξ . En $\omega = 0$, el ángulo de fase es igual a 0° . En la frecuencia de corte $\omega = \omega_n$, el ángulo de fase es -90° , sin considerar ξ , dado que:

$$\phi = -\tan^{-1} \left(\frac{2\xi}{0} \right) = -90^\circ$$

En $\omega = \infty$, el ángulo de fase se convierte en -180° . La curva del ángulo de fase tiene una pendiente simétrica respecto del punto de inflexión, punto en el que $\phi = -90^\circ$. No existen maneras simples de trazar tales curvas de fase. Es necesario referirse a las curvas de ángulo de fase trazadas en la Figura 11. Las curvas de respuesta en frecuencia para el factor:

$$1 + 2\xi \left(j \frac{\omega}{\omega_n} \right) + \left(j \frac{\omega}{\omega_n} \right)^2$$

Pueden obtenerse simplemente si se invierte el signo de la magnitud logarítmica y el del ángulo de fase del factor:

$$G(j\omega) = \frac{1}{1 + 2\xi \left(\frac{j\omega}{\omega_n} \right) + \left(\frac{j\omega}{\omega_n} \right)^2}$$

Para obtener las curvas de respuesta en frecuencia de una función de transferencia cuadrática determinada, primero se debe determinar los valores de la frecuencia de corte $\omega = \omega_n$ y del factor de amortiguamiento relativo ξ . A continuación, usando la familia de curvas obtenidas en la Figura 11, se grafican las curvas de respuesta en frecuencia.

Frecuencia de Resonancia ω_r y el Valor del Pico de Resonancia M_r

La magnitud del factor de segundo orden considerado de la forma canónica:

$$G(j\omega) = \frac{1}{1 + 2\xi \left(\frac{j\omega}{\omega_n}\right) + \left(\frac{j\omega}{\omega_n}\right)^2}$$

Viene dado en forma logarítmica por:

$$|G(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2 + \left(2\xi \frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}}$$

Si tiene $|G(j\omega)|$ un valor pico en alguna frecuencia, ésta se denomina *frecuencia de resonancia* ω_r . Dado que el numerador de $|G(j\omega)|$ es constante, ocurrirá un valor pico de $|G(j\omega)|$ cuando la siguiente función es mínima.

$$g(j\omega) = \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2 + \left(2\xi \frac{\omega}{\omega_n}\right)^2$$

Esta ecuación puede ser reescrita de la forma:

$$g(j\omega) = \left[\frac{\omega^2 - \omega_n^2(1 - 2\xi^2)}{\omega_n^2} \right]^2 + 4\xi^2(1 - \xi^2)$$

El valor mínimo de $g(j\omega)$ ocurre en:

$$\omega = \sqrt{1 - 2\xi^2}$$

Por lo tanto, la frecuencia de resonancia ω_r es:

$$\omega_r = \omega_n \sqrt{1 - 2\xi^2} \quad \text{para } 0 \leq \xi \leq 0.707$$

Conforme el factor de amortiguamiento relativo ξ tiende a cero, la frecuencia de resonancia ω_r es menos a la frecuencia natural amortiguada,

$$\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - 2\xi^2}$$

Por lo cual se exhibe en la respuesta transitoria.

Se puede observar que si se cumple que $\xi > 0.707$, no hay pico de resonancia. La magnitud $|G(j\omega)|$ disminuye en forma monótona con el aumento de la frecuencia ω . (La magnitud es menor que 0 dB para todos los valores de $\omega > 0$. Para $0.7 < \xi < 1$, la respuesta a una señal de excitación de escalón es oscilatoria, pero las oscilaciones están bien amortiguadas y apenas son perceptibles).

La magnitud del pico de resonancia M_r , se encuentra sustituyendo la frecuencia de resonancia en la magnitud del factor cuadrático. Para $0 \leq \xi \leq 0.707$,

$$M_r = |G(j\omega)|_{\max} = |G(j\omega_r)| = \frac{1}{2\xi\sqrt{1 - \xi^2}}$$

Para $\xi > 0.707$

$$M_r = 1$$

Conforme el factor de amortiguamiento relativo ξ tiende a cero, el pico de resonancia tiene M_r , tiende a infinito. Esto significa que, si el sistema no amortiguado se excita en su frecuencia natural (ω_n), la magnitud de $G(j\omega)$ se vuelve infinita. La relación entre el pico de resonancia M_r , y ξ aparece en la Figura 12.

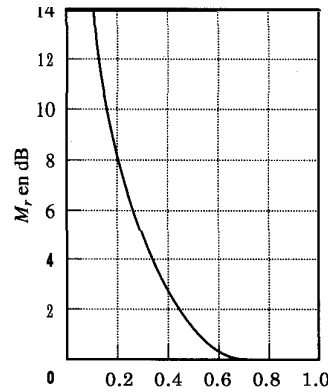


Figura 12. Curva de Pico de Resonancia M_r , versus factor de amortiguamiento relativo ξ para el factor cuadrático $G(j\omega)=[1+2\xi(j\omega\omega_n)+(j\omega\omega_n)^2]^{-1}$

El ángulo de fase del factor cuadrático $G(j\omega)$ en la frecuencia en la que ocurre el pico de resonancia se obtiene por:

$$\angle G(j\omega) = -\tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{1-2\xi^2}}{\xi}\right) = -90^\circ + \text{sen}^{-1}\left(\frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}\right)$$

Procedimiento General para el Trazado del Diagrama de Bode

Primero reescriba la función de transferencia $G(s)$ como un producto de factores básicos conocidos, de la forma:

$$G(s) = Ks^{\pm N} \left[\prod \frac{p_i}{s+p_i} \right] \left[\prod \frac{s+z_i}{z_i} \right] \left[\prod \frac{\omega_n^2}{s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2} \right]$$

Término Constante Polos/ceros en el origen Polos reales Ceros reales Pares de polos complejos conjugados

La función de transferencia senoidal $G(j\omega)$ se expresa como un producto de los factores básicos conocidos como se mostró antes.

Por último, se dibuja las curvas asintóticas de magnitud logarítmica con pendientes adecuadas entre las frecuencias de corte. La curva exacta, que se encuentra cerca de la curva asintótica, se obtiene agregando las correcciones adecuadas. La curva del ángulo de fase de $G(j\omega)$ se traza agregando las curvas de ángulo de fase de los factores individuales. El uso de las trazas de Bode con aproximaciones asintóticas toma mucho menos tiempo que otros métodos utilizados para calcular la respuesta en frecuencia de una función de transferencia. La facilidad de graficar las curvas de respuesta en frecuencia para una función de transferencia determinada, es la principal razón por la cual las trazas de Bode se usan tanto en la práctica.

Ejemplo Ilustrativo de Trazado de Bode (Tomando de Ogata [1])

Dibuje las trazas de Bode para la siguiente función de transferencia:

$$G(s) = \frac{10(s+3)}{s(s+2)(s^2+s+2)}$$

Hacer las correcciones necesarias para que la curva de magnitud logarítmica sea precisa.

Resolución.

La función de transferencia $G(s)$, se transforma en una forma simple, para que sea una función de productos de factores individuales conocidos.

$$G(s) = \frac{7.5\left(\frac{s}{3}+1\right)}{s\left(\frac{s}{2}+1\right)\left(\frac{s^2}{2}+\frac{s}{2}+1\right)}$$

En este caso se puede ver que:

$$G(s) = 7.5 \left(\frac{s}{3} + 1 \right) \frac{1}{s} \frac{1}{\left(\frac{s}{2} + 1 \right)} \frac{1}{\left(\frac{s^2}{2} + \frac{s}{2} + 1 \right)}$$

Factor de ganancia constante: $K = 7.5$

Factor integral: $(j\omega)^{-1}$

Factor de primer orden en el numerador: $\left(1 + \frac{j\omega}{3} \right)$

Factor de primer orden en el denominador: $\left(1 + \frac{j\omega}{2} \right)^{-1}$

Factor de segundo orden en el denominador: $\left(1 + \frac{j\omega}{2} + \frac{(j\omega)^2}{2} \right)^{-1}$

Las frecuencias de corte, para cada término resulta ser:

Factor de ganancia constante: *No posee corte*

Factor integral: $\omega_1 = 0$

Factor de primer orden en el numerador: $\omega_2 = 3$, debido a que $\tau = 1/3$

Factor de primer orden en el denominador: $\omega_3 = 2$, debido a que $\tau = 1/2$

Factor de segundo orden en el denominador: $\omega_4 = \sqrt{2}$, y $\xi = 0.3536$.

Para graficar el trazado asintótico de Bode, la Figura 13 muestra las curvas asintóticas separadas para cada uno de los factores. A continuación se obtiene la curva compuesta agregando algebraicamente las curvas individuales, como también se observa en la figura 13. Considere que, cuando se agregan las curvas asintóticas individuales a cada frecuencia, la pendiente de la curva compuesta es acumulativa.

Debajo de $\omega_4 = \sqrt{2}$, la gráfica tiene la pendiente de -20 dB/década. En la primera frecuencia de corte $\omega_4 = \sqrt{2}$, la pendiente cambia a -60 dB/década y continúa a la siguiente frecuencia de corte $\omega_3 = 2$, en donde la pendiente se convierte en -80 dB/década. En la última frecuencia corte $\omega_2 = 3$, la pendiente cambia a -60 dB/década.

Una vez dibujada una curva aproximada de magnitud logarítmica, la curva real se obtiene agregando correcciones a todas las frecuencias de corte y a las frecuencias una octava abajo y arriba de las frecuencias de corte. Para los factores de primer orden $1/(1 + j\omega\tau)^{\pm 1}$, las correcciones son ± 3 dB en la frecuencia de corte y ± 1 dB en las frecuencias una octava abajo y arriba de la frecuencia de corte. Las correcciones necesarias para el factor cuadrático se obtienen a partir de la Figura 10. La curva exacta de magnitud logarítmica para $G(j\omega)$, aparece con una curva de guiones en la Figura 13.

Observe que cualquier cambio en la pendiente de la curva de magnitud sólo se hace en las frecuencias de esquina de la función de transferencia $G(j\omega)$. Por tanto, en lugar de dibujar y agregar curvas de magnitud individuales, tal como aparece, es posible trazar la curva de magnitud sin trazar las curvas individuales.

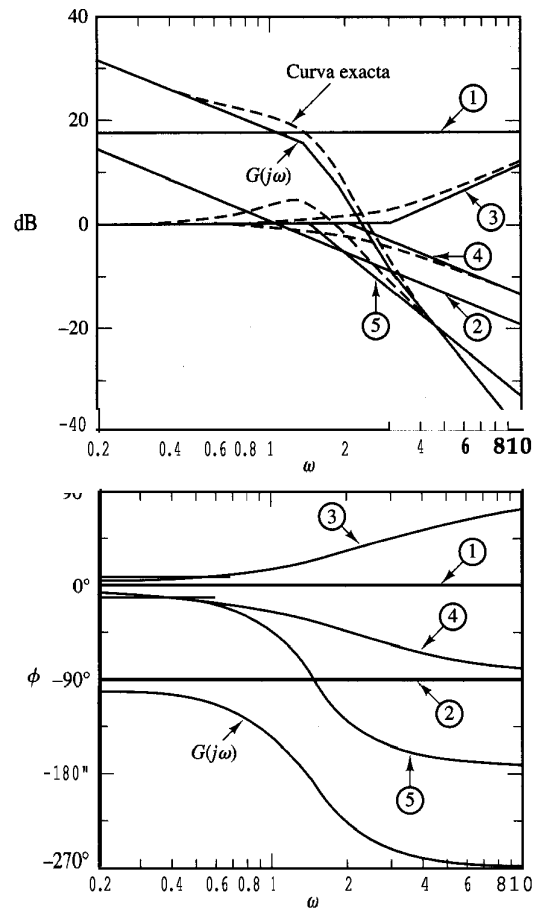


Figura 13. Trazado del Diagrama de Bode del Sistema Considerado en el Ejemplo

Se comienza por dibujar la parte de la recta de frecuencia más baja (es decir, la recta con la pendiente de -20 dB/década para $(\omega < \sqrt{2})$). Conforme la frecuencia aumenta, se obtiene el efecto de los polos complejos conjugados (el término cuadrático) en la frecuencia de corte $\omega_1 = \sqrt{2}$. Los polos complejos conjugados provocan que las pendientes de la curva de magnitud cambien de -20 a -60 dB/década. En la siguiente esquina de frecuencia, $\omega_2 = 2$, el efecto del polo es cambiar la pendiente a 40 dB/década. Por último, en la frecuencia de esquina $\omega_3 = 3$, el efecto del cero es cambiar la pendiente de -80 a -60 dB/década.

Para graficar la curva de ángulo de fase completa, deben trazarse las curvas de ángulo de fase de todos los factores. La suma algebraica de todas las curvas de ángulo de fase proporciona la curva completa de ángulo de fase, como se aprecia en la Figura 13.

Para efectuar este trazado de Bode por medio del programa Matlab™, solo hace falta, primero definir la función de transferencia, para ello:

```
>> syms s
>> den=s*(s+2)*(s^2+s+2)
den =
s*(s+2)*(s^2+s+2)
>> expand(den)
ans =
s^4+3*s^3+4*s^2+4*s
```

De tal modo que el polinomio del denominador es : $P(s) = s^4 + 3s^3 + 4s^2 + 4s$, y el del numerador es: $Q(s) = 10s + 30$, de modo que:

$$G(s) = \frac{10s + 30}{s^4 + 3s^3 + 4s^2 + 4s}$$

En Matlab™, esta representación queda:

```
>> G=tf([10 30],[1 3 4 4 0])
```

Transfer function:

```
10 s + 30
-----
s^4 + 3 s^3 + 4 s^2 + 4 s
```

Se efectúa la representación del diagrama de Bode:

```
>> bode(G)
```

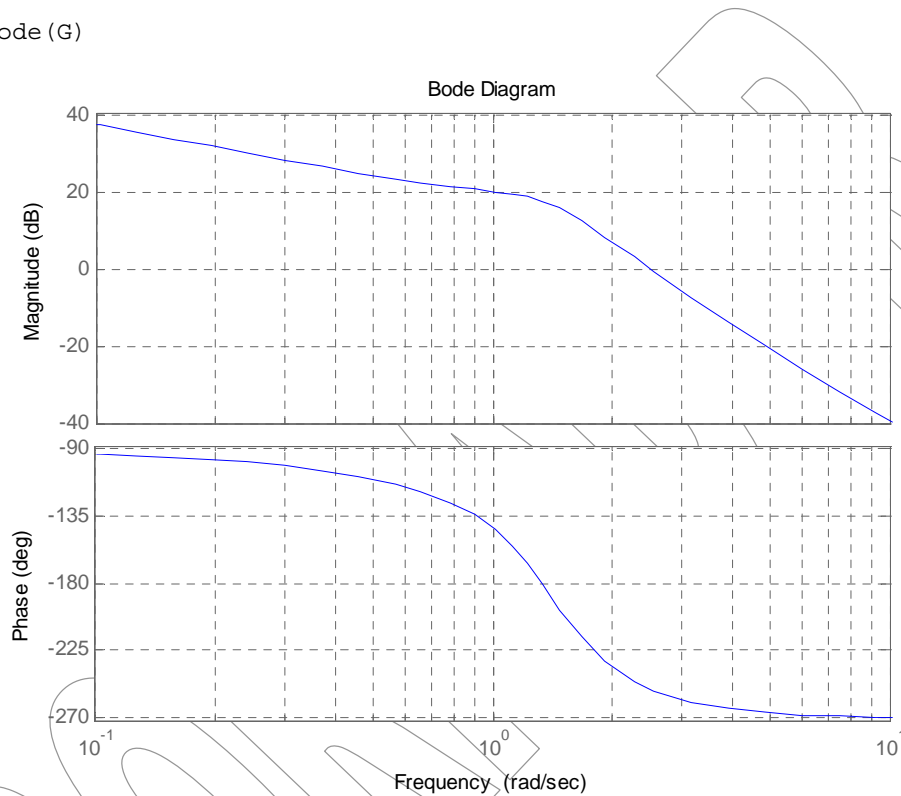


Figura 14. Trazado del Diagrama de Bode del Sistema Considerado en el Ejemplo mediante Matlab™

Referencias Documentales

[1] Ogata, K., *Ingeniería de Control Moderna*, Prentice Hall, 1980.

Nota Especial

El autor quiere hacer del conocimiento público, que este documento no es inédito. Este documento es una adecuación en “*cierta medida*” del texto *Ingeniería de Control Moderna* de Katsuhiko Ogata. En cierta medida el autor lo que ha tratado de simplificar la redacción original. De igual modo, el autor desea hacer del conocimiento del lector que este documento no ha sido revisado por nadie, y es posible que contenga errores. En cuyo caso, ante cualquier discrepancia cognitiva, por favor comunicarse con el autor. Las aportaciones del lector son de mucho interés para el autor, a fin de desarrollar un material de calidad y depurado para las futuras generaciones.

Francisco M. González-Longatt

Solo para ser empleado con objetivo de evaluación, o académicos. Prohibido la reproducción total o parcial de este documento. Derechos de Autor Reservados.
Copyright © 2007. Francisco M. Gonzalez-Longatt. fglongatt@ieee.org

BORRADOR