

ELC-33103  
Teoría de Control

---

---



Anexo 1.1  
Modelación Matemática de  
Sistemas Físicos

Prof. Francisco M. Gonzalez-Longatt

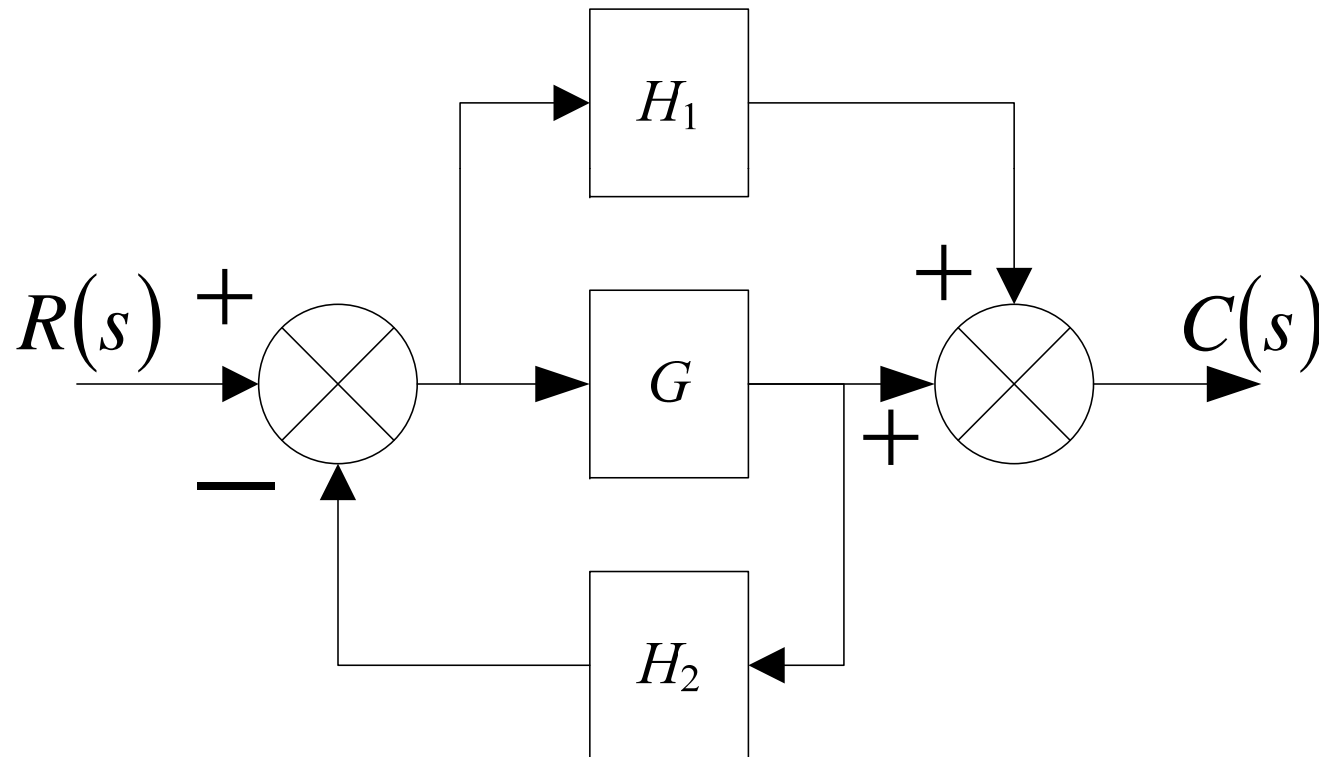
[fglongatt@ieee.org](mailto:fglongatt@ieee.org)

<http://www.giaelec.org/fglongatt/TIC.html>

# 1. Reducción de Diagramas de Bloque

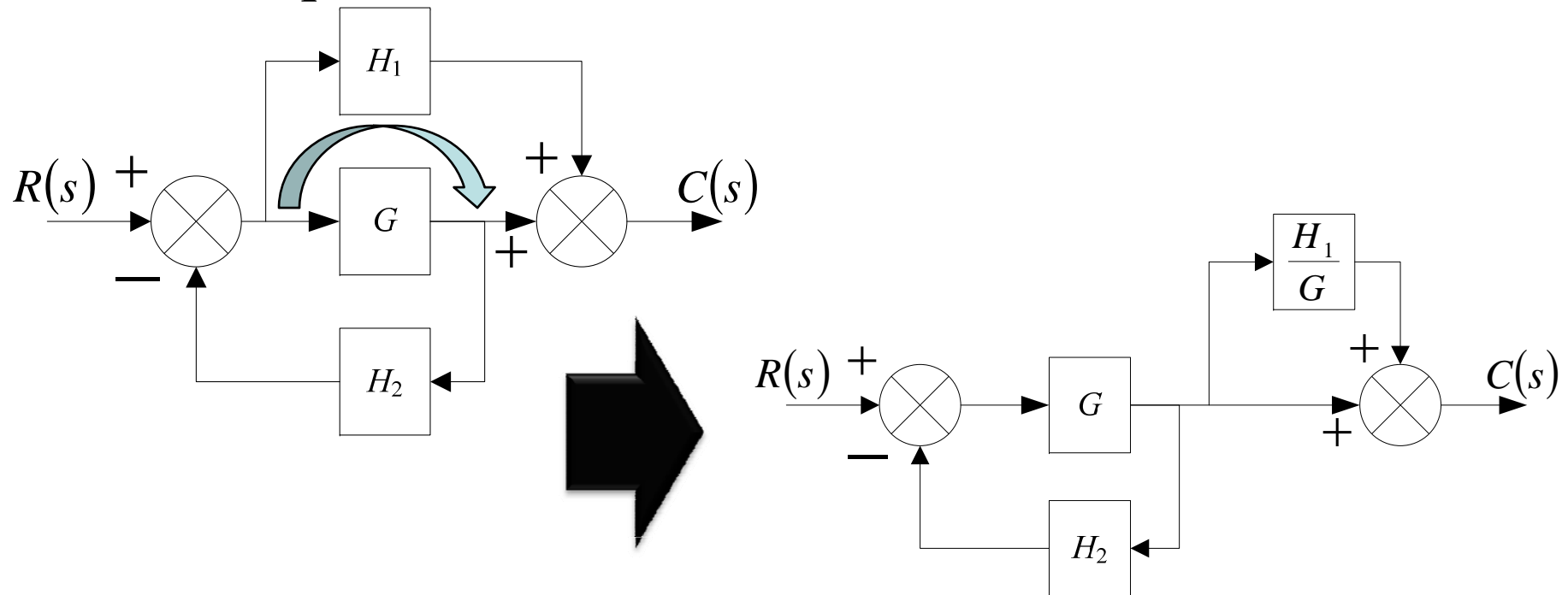
---

- Se desea simplificar el diagrama de bloques mostrado en la figura siguiente.



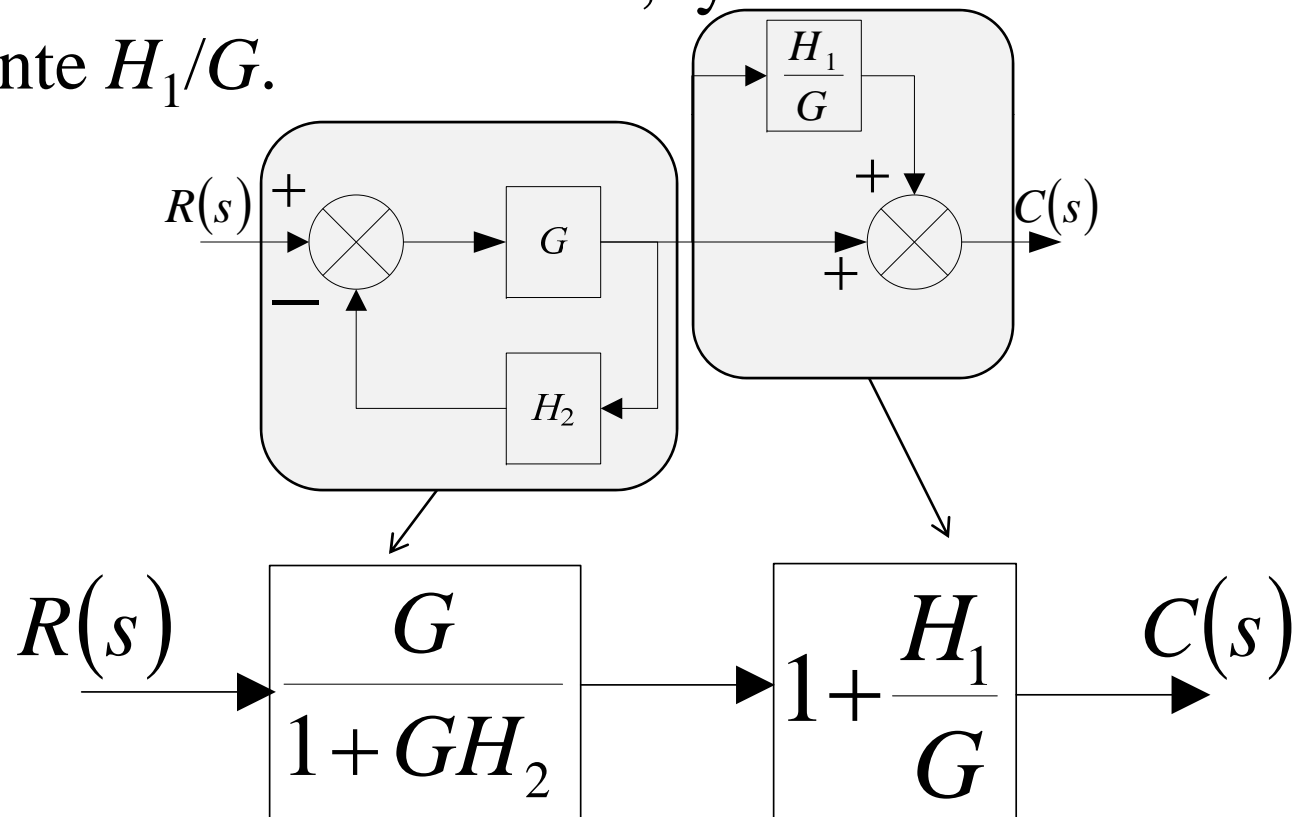
# 1. Reducción de Diagramas de Bloque

- El primer paso es mover el punto de ramificación de la trayectoria de señal que contiene la función de transferencia  $H_1$  fuera del lazo que contiene  $H_2$ , de tal modo que el sistema resulta:



# 1. Reducción de Diagramas de Bloque

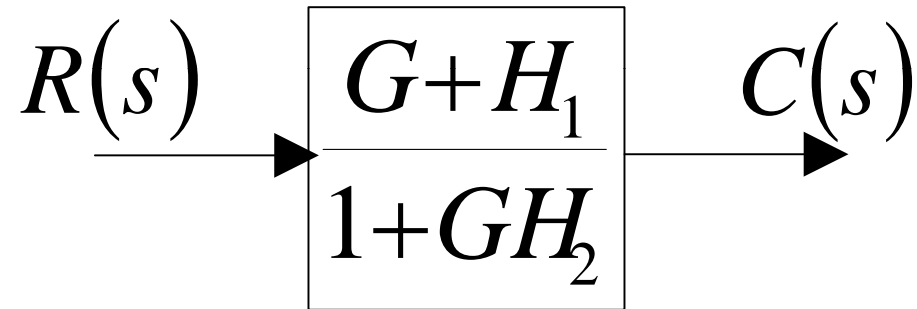
- El segundo paso, es procede a eliminar los dos lazos; el que contiene a  $H_2$ , que es una realimentación, donde se cierra un lazo, y el la bifurcación hacia delante  $H_1/G$ .



# 1. Reducción de Diagramas de Bloque

---

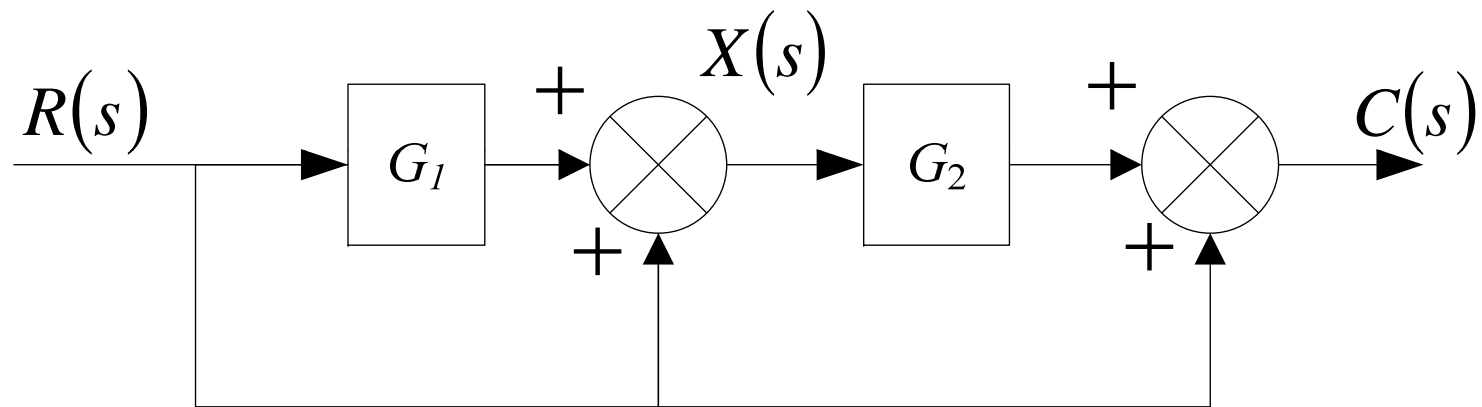
- Una vez que se han eliminado los dos lazo, se procede a combinar la asociación de dos bloques en cascada y se logra:



## 2. Reducción de Diagrama de Bloques

---

- Se desea simplificar el diagrama de bloques mostrado en la siguiente Figura.

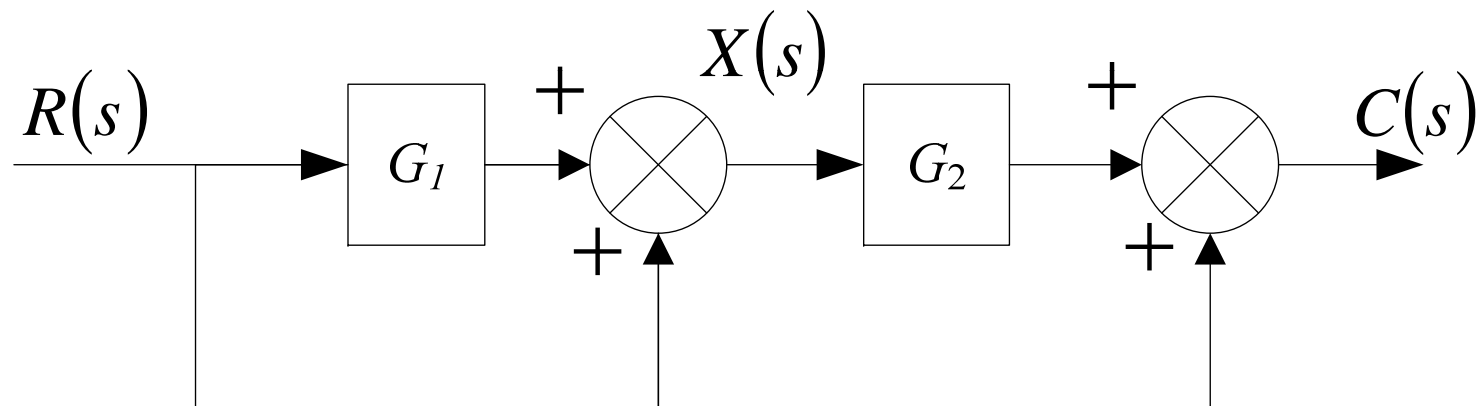


- A partir del resultado obtenido, se desea obtener la función de transferencia que relaciona  $C(s)$  con  $R(s)$

## 2. Reducción de Diagrama de Bloques

---

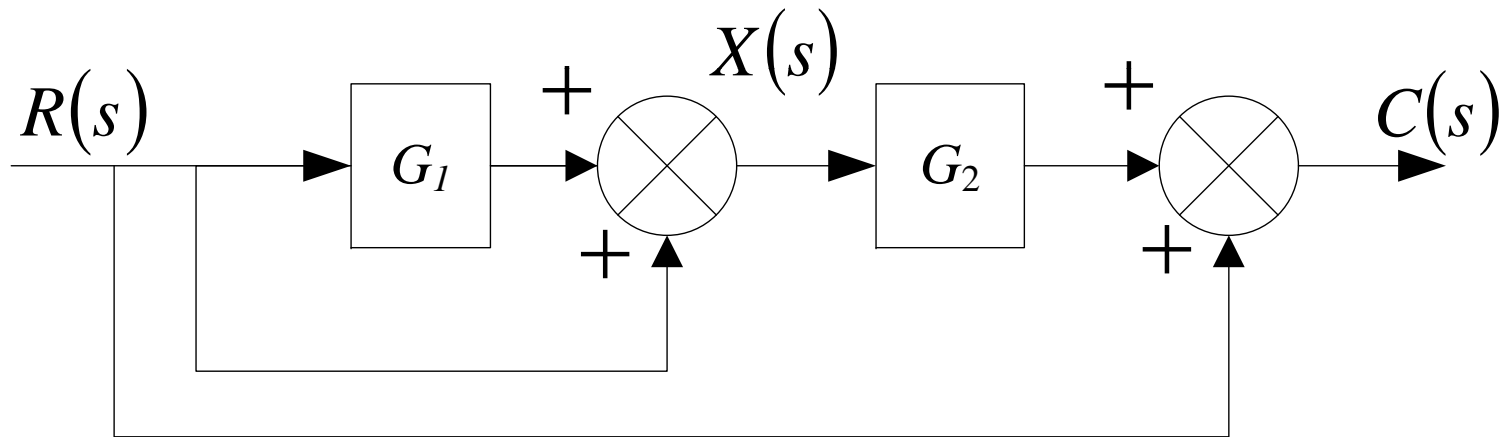
- Un primer enfoque, es modificar la señal que va a los sumadores, y se modifica, para mostrada como dos lazos separados.



## 2. Reducción de Diagrama de Bloques

---

- Ahora, se procede a eliminar la trayectoria directa hacia delante, mas interna, que involucra a la función de transferencia  $G_1$ .

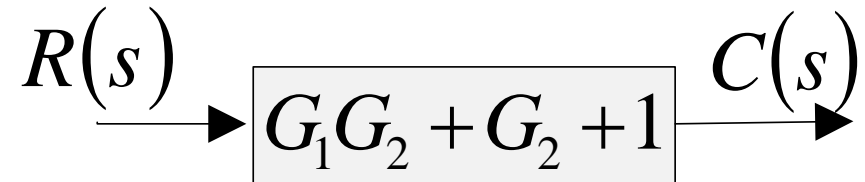




## 2. Reducción de Diagrama de Bloques

---

- Se procede ahora a eliminar el paso hacia delante.



- Finalmente la función de transferencia  $C(s)/R(s)$  se consigue mediante:

$$\frac{C(s)}{R(s)} = G_1G_2 + G_2 + 1$$

## 2. Reducción de Diagrama de Bloques

---

- También se obtiene el mismo resultado, procediendo del siguiente modo. Dado que la señal  $X(s)$  es la suma de dos señales  $G_1R(s)$  y  $R(s)$ , se tiene que:

$$X(s) = G_1R(s) + R(s)$$

- La señal de salida  $C(s)$  es la suma de  $G_2X(s)$  y  $R(s)$ .  
Por tanto:

$$C(s) = G_2X(s) + R(s) = G_2[G_1R(s) + R(s)] + R(s)$$

## 2. Reducción de Diagrama de Bloques

---

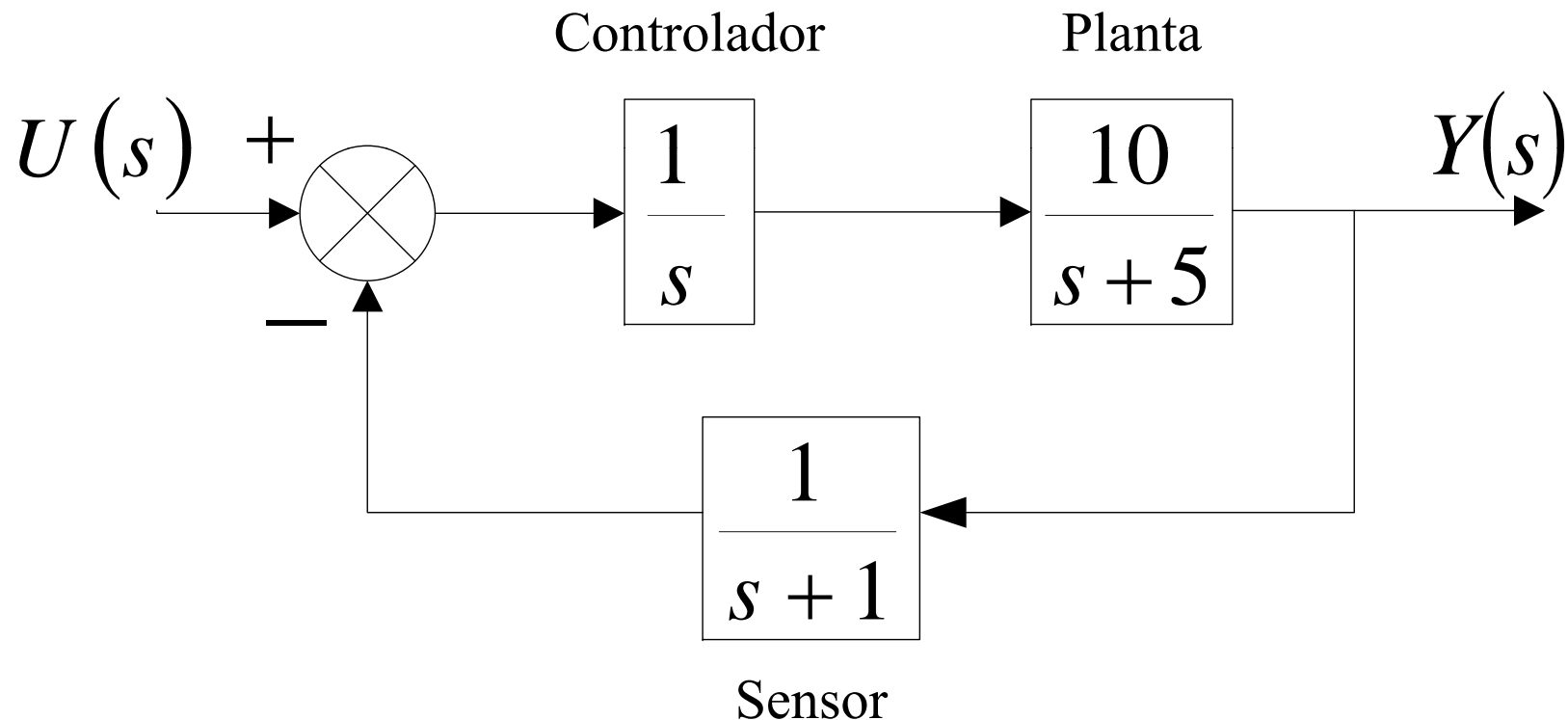
- De tal modo, que se obtiene el mismo resultado ya presentado:

$$\frac{C(s)}{R(s)} = G_1 G_2 + G_2 + 1$$

### 3. Ejemplo de Reducción de Modelo de Espacio de Estado

---

- Obtener el modelo en el espacio de estados del sistema que aparece en la siguiente Figura.



### 3. Ejemplo de Reducción de Modelo de Espacio de Estado

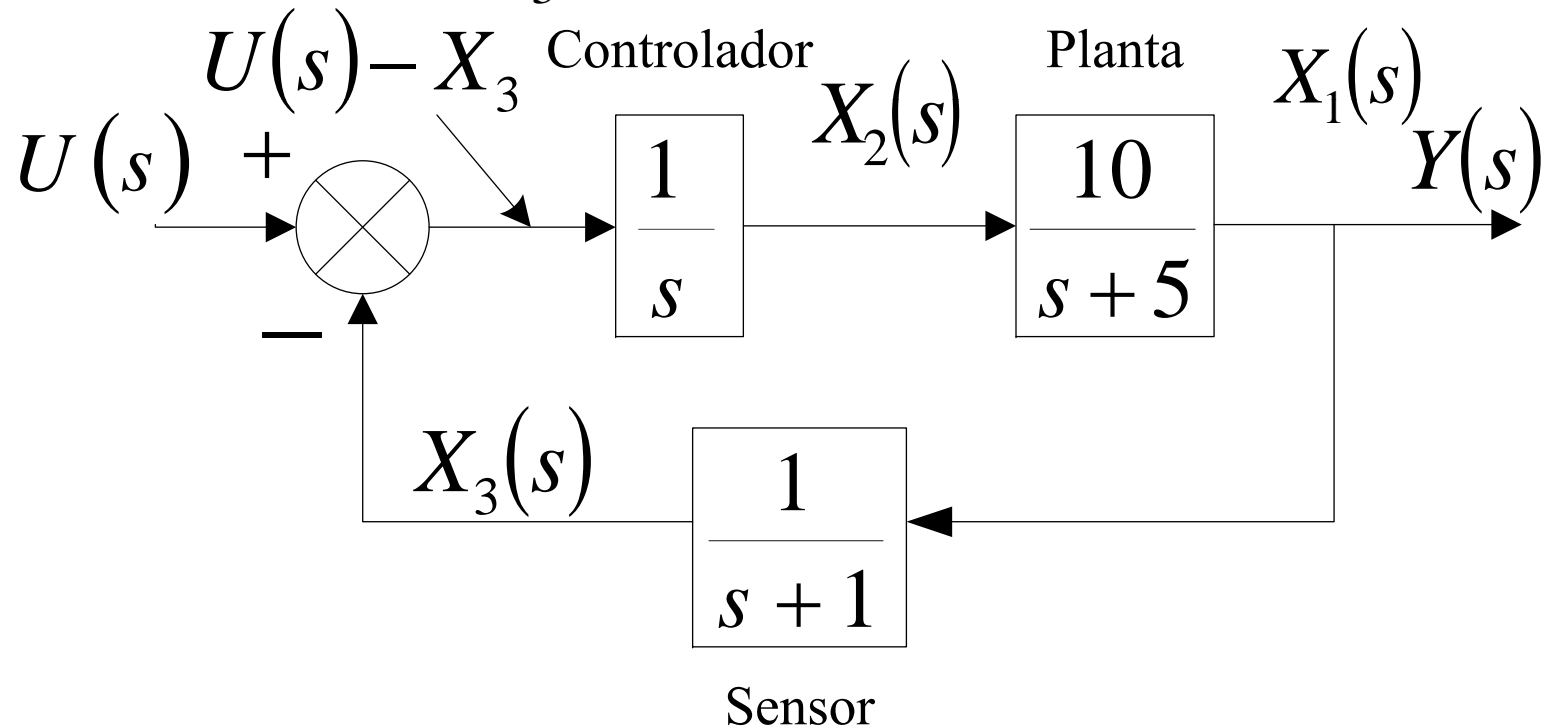
---

- El sistema contiene un integrador y dos con retraso; es decir, dos bloques con función de transferencia de primer orden.
- La salida de cada integrador o con retraso puede ser considerado como una variable de estado.
- Se define la salida de la planta como la variable de estado  $x_1$ , la salida del controlador como  $x_2$  y la salida del sensor como  $x_3$ .

### 3. Ejemplo de Reducción de Modelo de Espacio de Estado

---

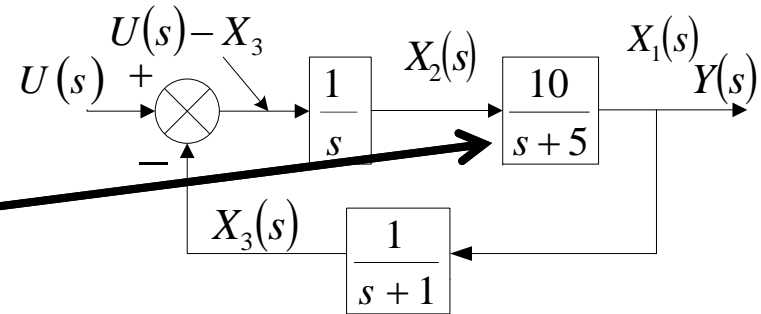
- Se define la salida de la planta como la variable de estado  $x_1$ , la salida del controlador como  $x_2$  y la salida del sensor como  $x_3$ .



### 3. Ejemplo de Reducción de Modelo de Espacio de Estado

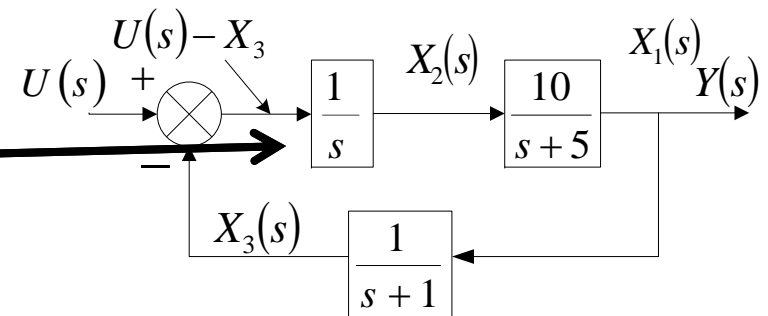
- Así, se obtiene que la función de transferencia de la planta queda dada por:

$$\frac{X_1}{X_2} = \frac{10}{s+5}$$



- De igual modo se aplica la algebra de señales al detector de error, junto con el controlador.

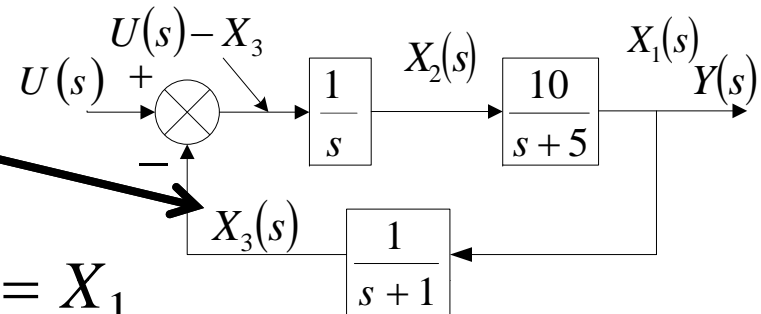
$$\frac{X_2}{U - X_3} = \frac{1}{s}$$



### 3. Ejemplo de Reducción de Modelo de Espacio de Estado

- En el caso del sensor se tiene:

$$\frac{X_3}{X_1} = \frac{1}{s+1}$$



- Y finalmente se tiene que:  $Y = X_1$
- El arreglo se puede reordenar y reescribir de la forma:

$$\left\{ \begin{array}{l} sX_1 = -5X_1 + 10X_2 \\ sX_2 = -X_1 + U \\ sX_3 = X_1 - X_3 \\ Y = X_1 \end{array} \right.$$



### 3. Ejemplo de Reducción de Modelo de Espacio de Estado

---

- Ahora, se procede a tomar la transformada inversa de Laplace de las cuatro ecuaciones precedentes (considerando las condiciones iniciales nulas) y se tiene:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_1 = -5x_1 + 10x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_3 + U \\ \dot{x}_3 = x_1 - x_3 \\ Y = x_1 \end{array} \right.$$

### 3. Ejemplo de Reducción de Modelo de Espacio de Estado

---

- Finalmente, estas ecuaciones diferenciales se escriben de manera matricial, en la forma canónica del modelo de espacio de estado del sistema, de modo que se obtiene:

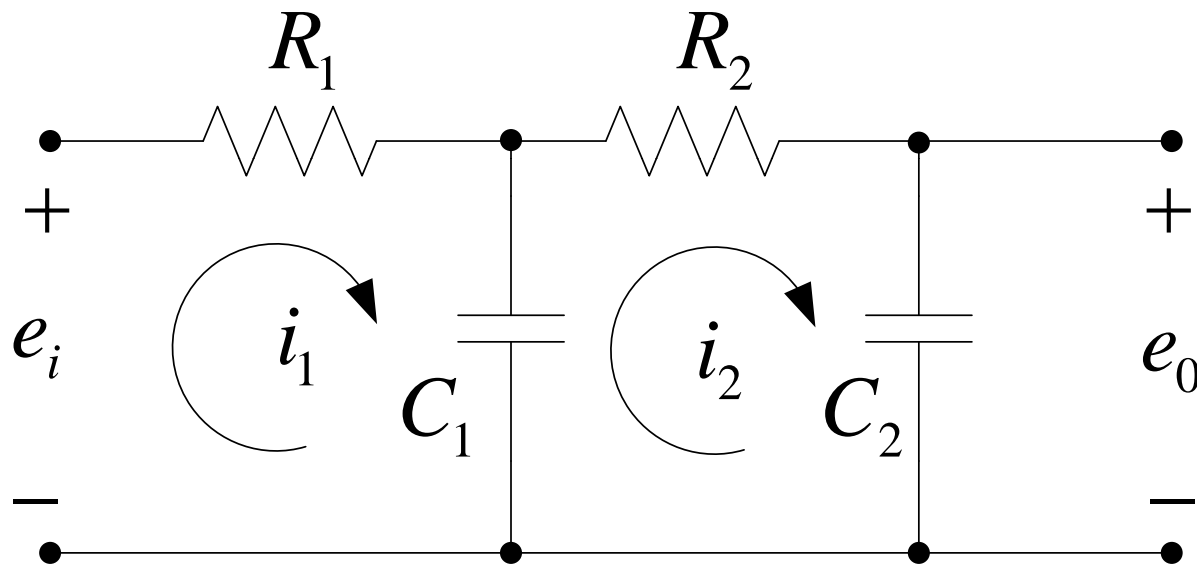
$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

## 4. Ejemplo de Función de Transformación

---

- Considere el circuito eléctrico que aparece en la figura siguiente.



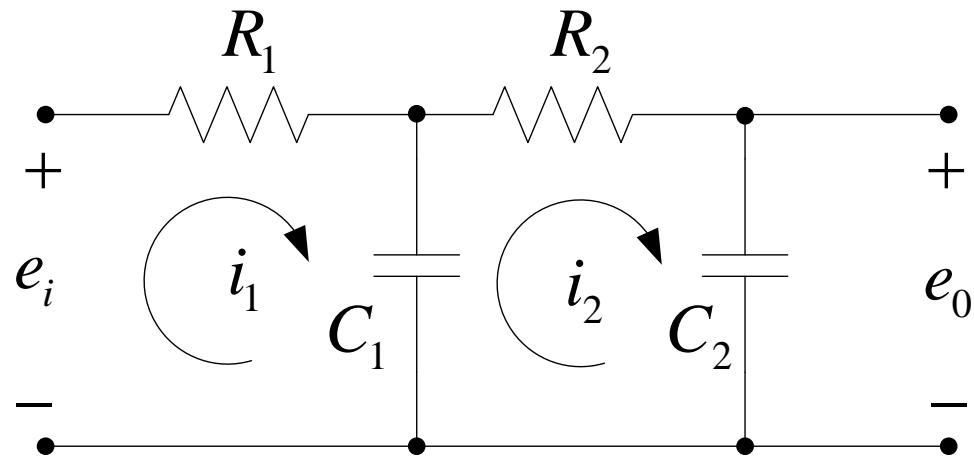
- Se desea obtener la función de transferencia  $E_i(s)/E_o(s)$  usando el enfoque de diagrama de bloques

## 4. Ejemplo de Función de Transformación

---

- Las ecuaciones para los circuitos son:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{C_1} \int (i_1 - i_2) dt + R_1 i_1 = e_i \\ \frac{1}{C_1} \int (i_2 - i_1) dt + R_2 i_2 + \frac{1}{C_2} \int i_2 dt = 0 \\ \frac{1}{C_2} \int i_2 dt = e_0 \end{array} \right.$$

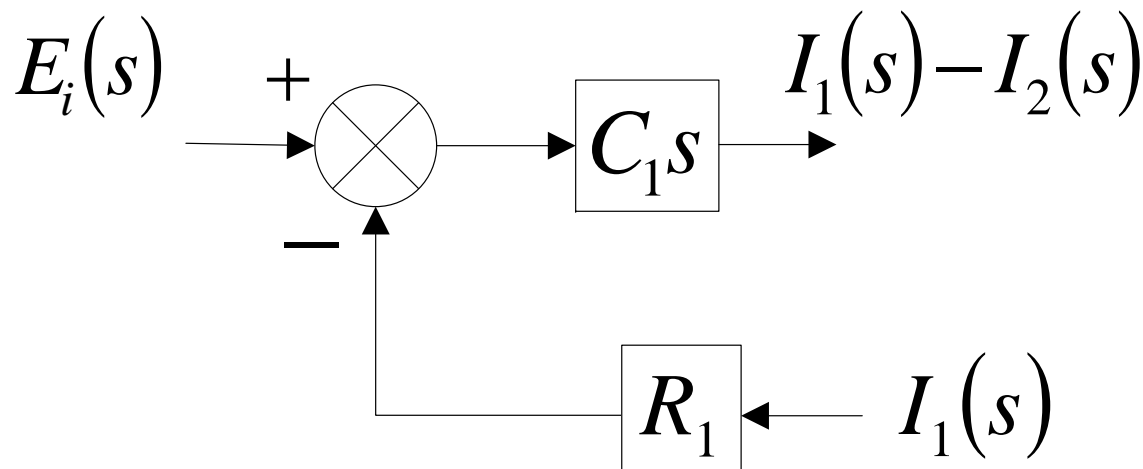


## 4. Ejemplo de Función de Transformación

---

- La ecuación primera del conjunto se puede reescribir como:

$$C_1 s [E_i(s) - R_1 I_1(s)] = I_1(s) - I_2(s)$$

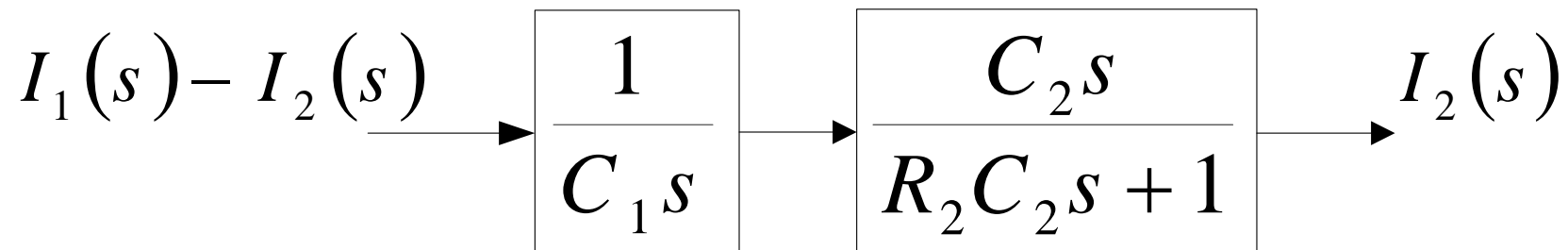


## 4. Ejemplo de Función de Transformación

---

- La ecuación segunda se modifica a:

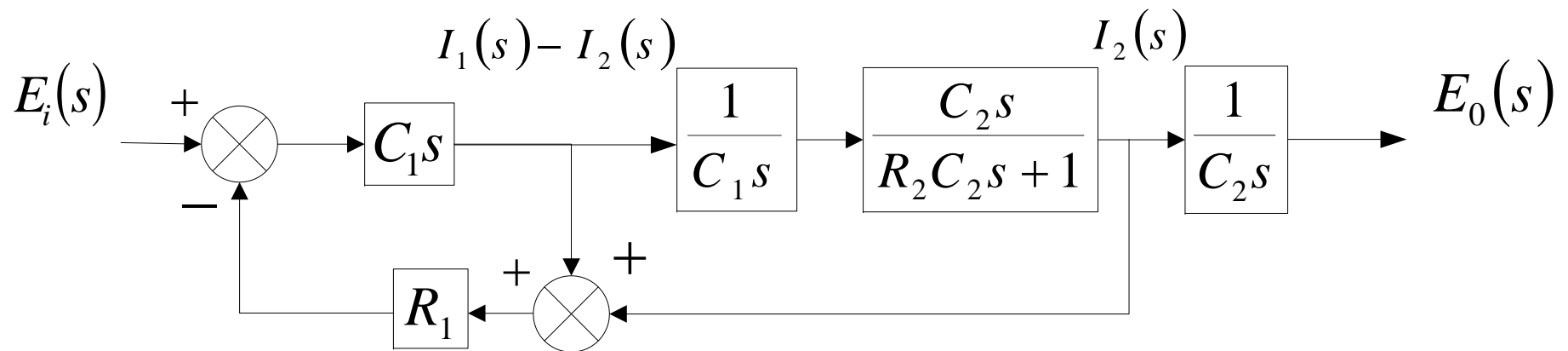
$$I_2(s) = \frac{C_2 s}{R_2 C_2 s + 1} \frac{1}{C_1 s} [I_1(s) - I_2(s)]$$



## 4. Ejemplo de Función de Transformación

---

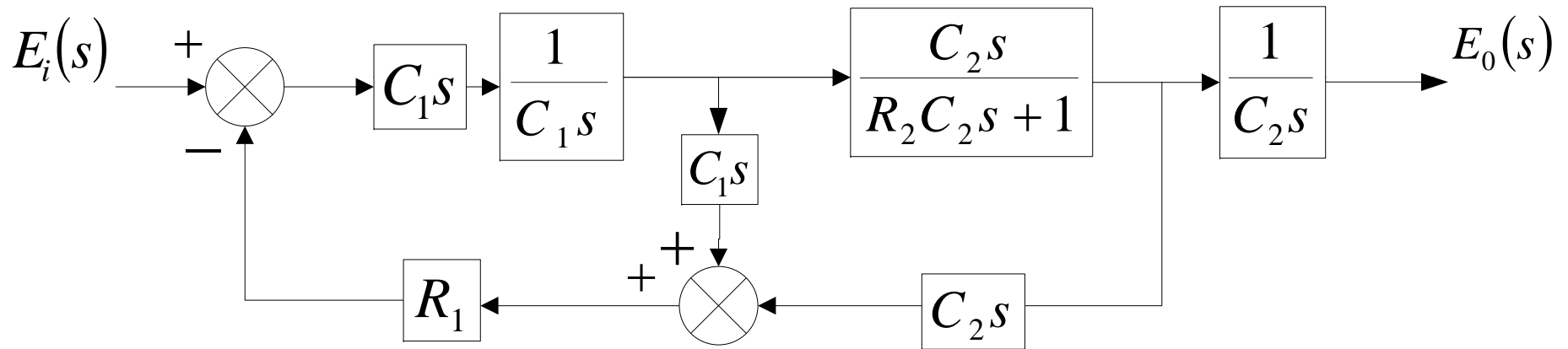
- Finalmente combinando de manera adecuada los diagramas de bloques desarrollados, de acuerdo a las ecuaciones del sistema se obtiene:



## 4. Ejemplo de Función de Transformación

---

- Ahora bien este diagrama de bloques se modifica y se simplifica sucesivamente. Inicialmente se mueven los puntos de bifurcación.

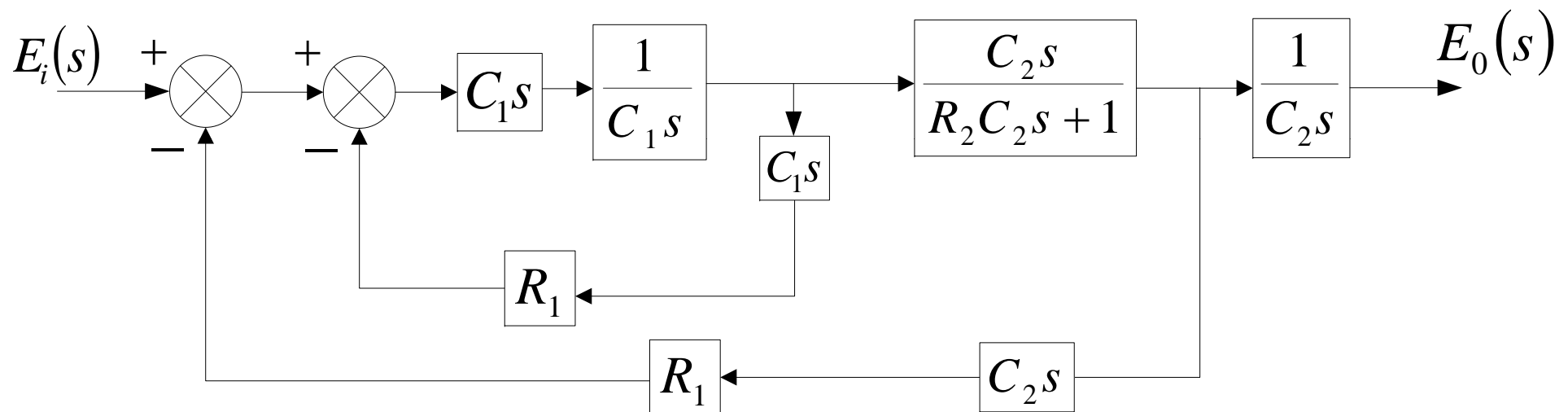




## 4. Ejemplo de Función de Transformación

---

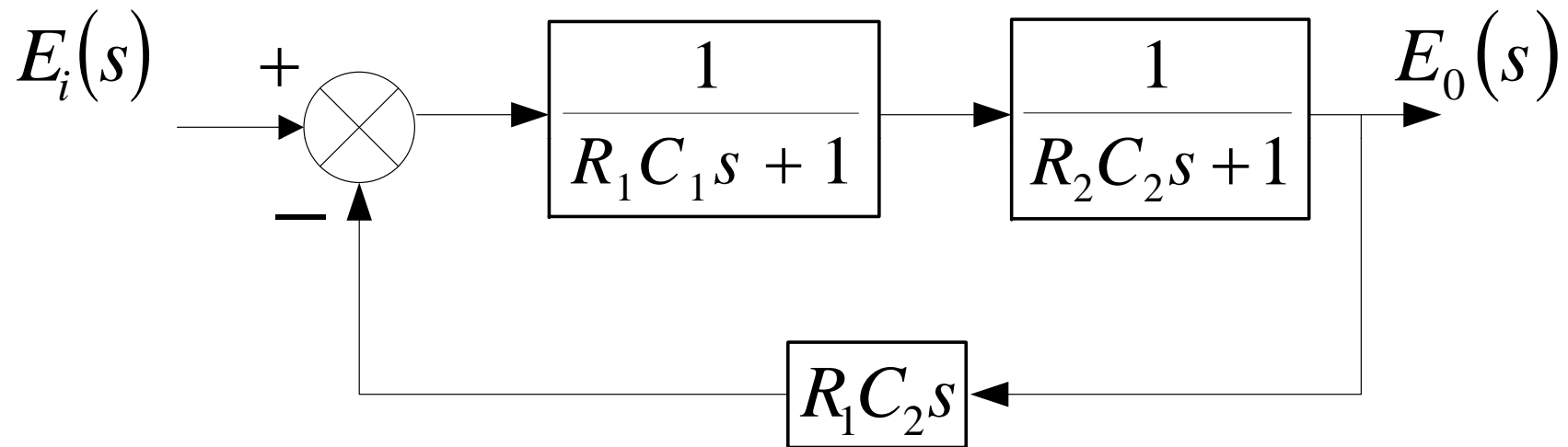
- Se procede a modificar la posición del sumador inferior:



## 4. Ejemplo de Función de Transformación

---

- Ahora se procede a resolver las respectivas realimentaciones, la externa y la interna:



## 4. Ejemplo de Función de Transformación

---

- Por ultimo, se resuelve la cascada y la respectiva realimentación, lográndose:

