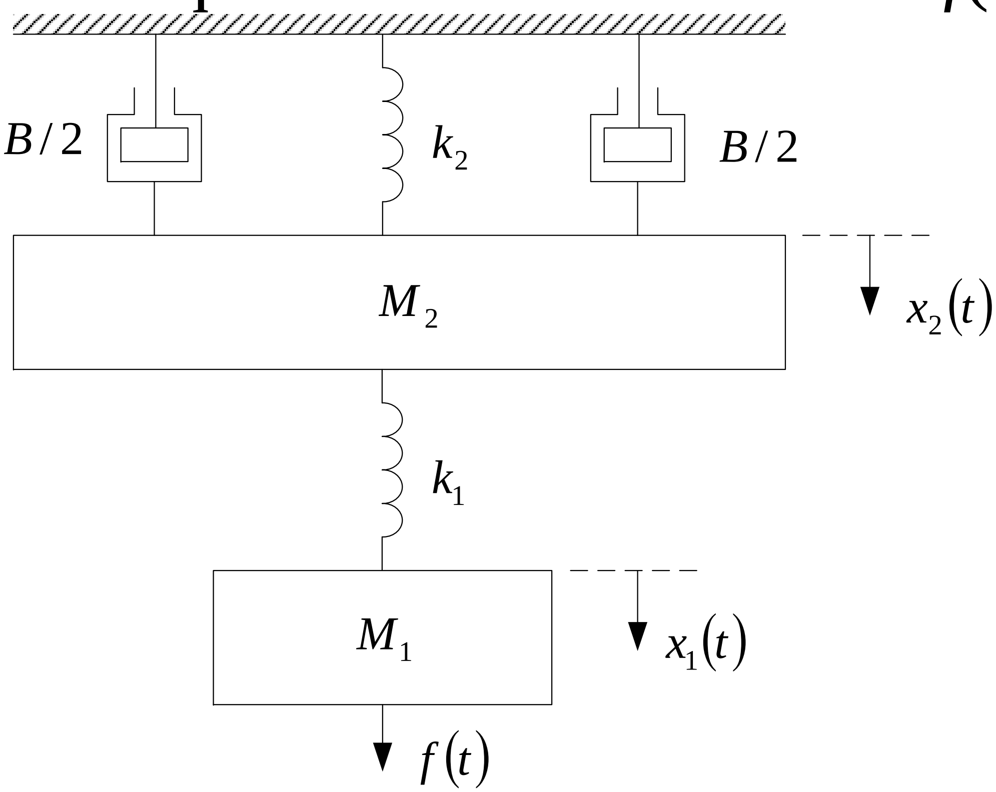
# Anexo 1.2
# Modelación Matemática de Sistemas Físicos

Prof. Francisco M. Gonzalez-Longatt
fglongatt@ieee.org
http://www.giaelec.org/fglongatt/TeoriaControlI.html

# 1. Modelo Matemático de Sistemas Físicos

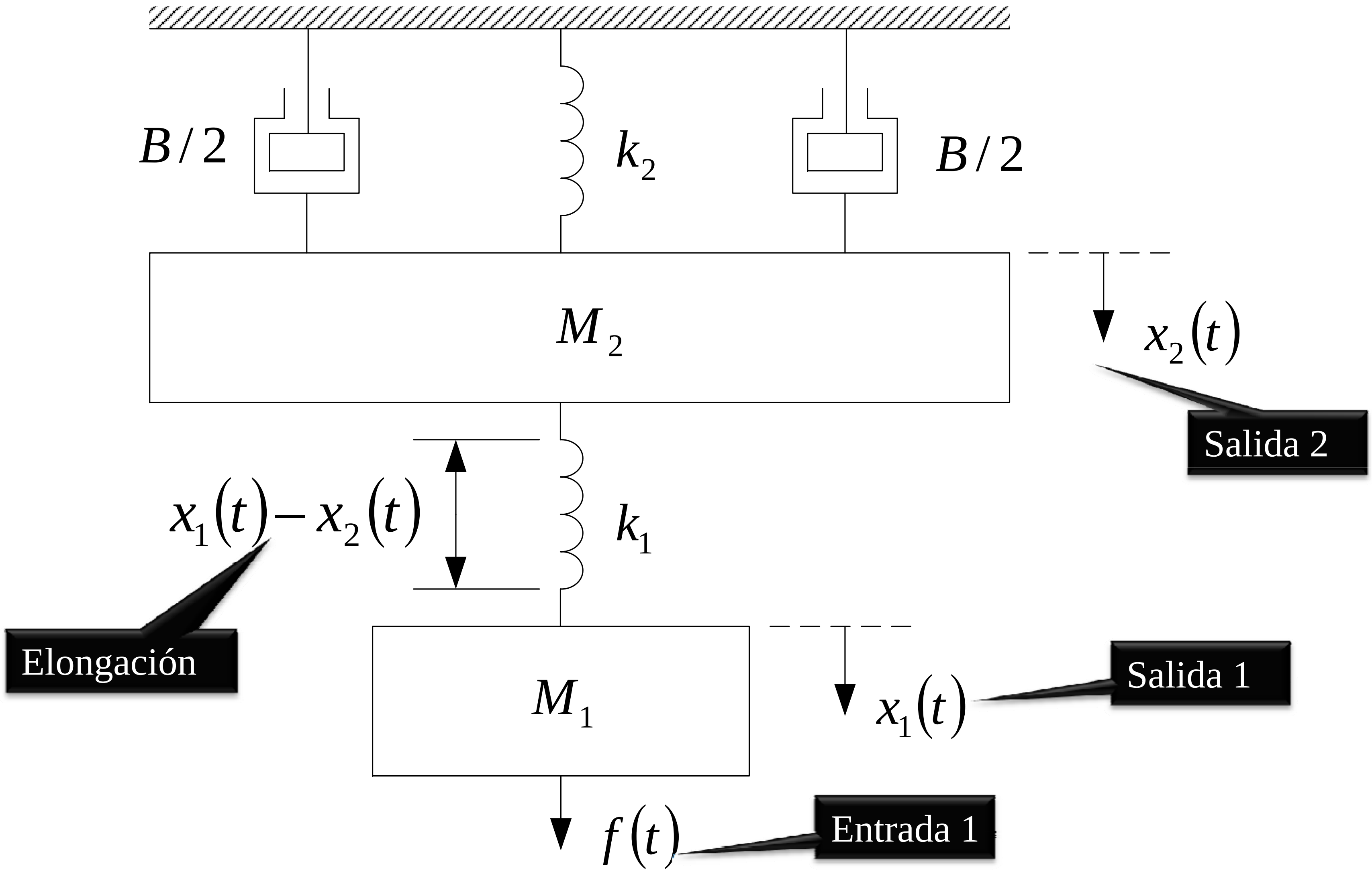
- Obtener un *modelo dinámico* para el sistema de fuerzas trasnacional en al dirección vertical que se muestra considerando que la entrada fuerza $f(t)$, Salidas $x_1(t)$ $x_2(t)$





Dr. Francisco M. Gonzalez-Longatt, fglongatt@ieee.org

# 1. Modelo Matemático de Sistemas Físicos





Dr. Francisco M. Gonzalez-Longatt, fglongatt@ieee.org

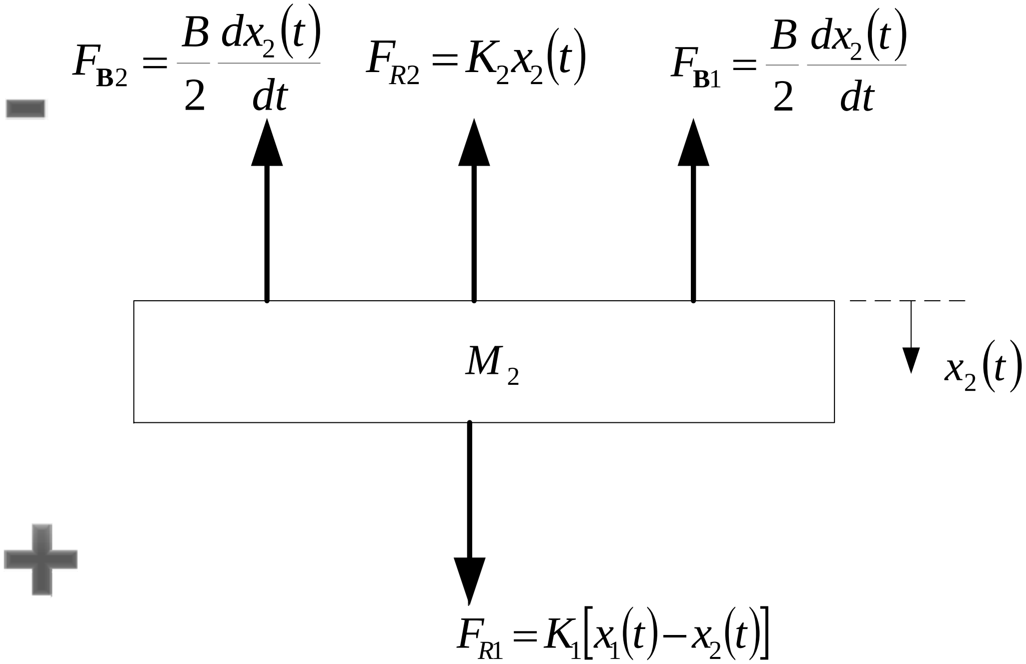
# 1. Modelo Matemático de Sistemas Físicos

- Con las posiciones de referencia determinadas tal como se ha especificado.
- Un desplazamiento inicial del resorte superior produce una fuerza igual y opuesta a $M_1g + M_2g$.
- Y un desplazamiento inicial del resorte inferior produce una fuerza que compensa $M_1g$.

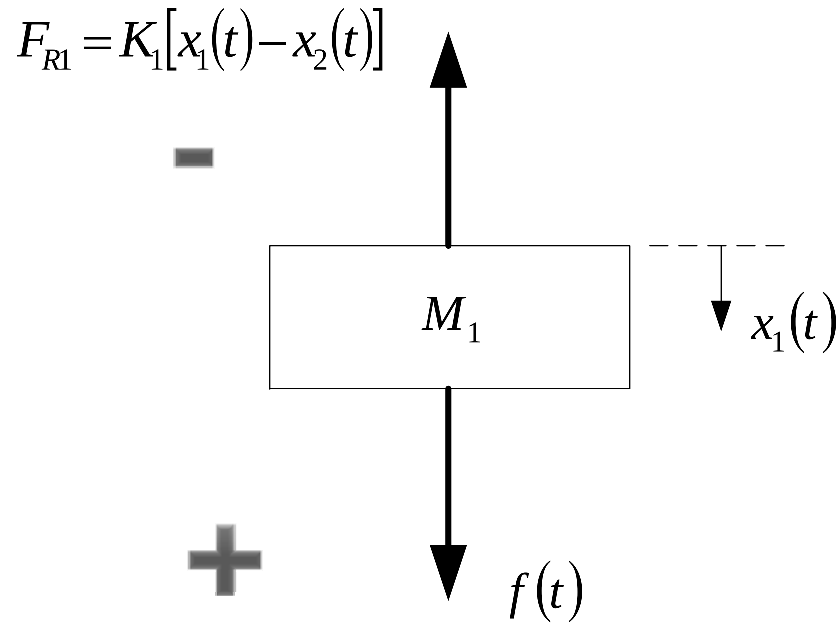

Dr. Francisco M. Gonzalez-Longatt, fglongatt@ieee.org

# 1. Modelo Matemático de Sistemas Físicos

- Se efectúa un diagrama de cuerpo libre:




Fuerzas Pasivas se dirigen en sentido opuesto al desplazamiento

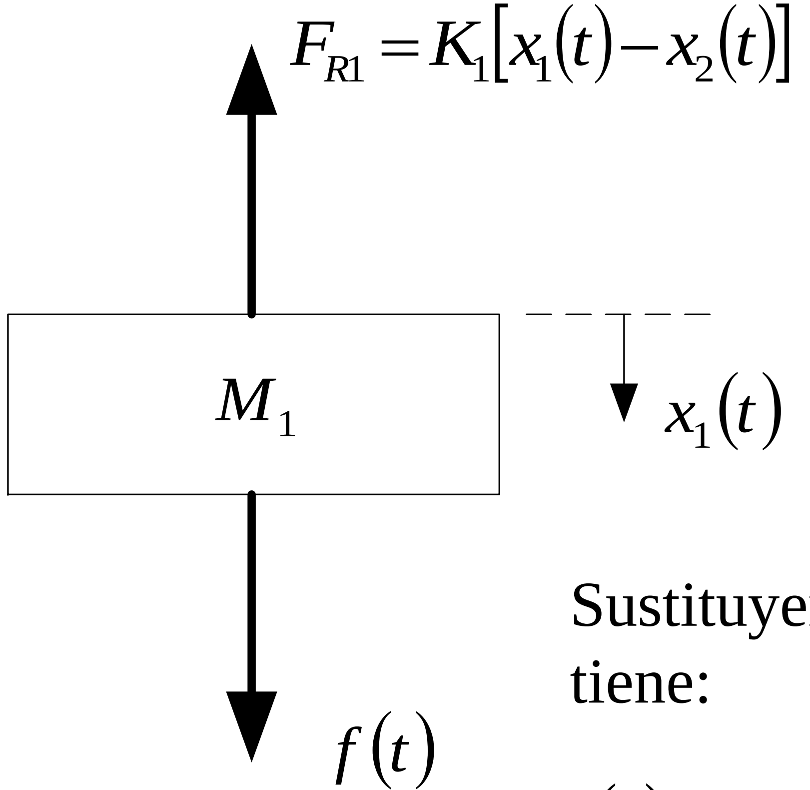





Dr. Francisco M. Gonzalez-Longatt, fglongatt@ieee.org

# 1. Modelo Matemático de Sistemas Físicos

- Del cuerpo $M_1$ se tiene:




Aplicando la 2da Ley de Newton:

$$f(t) = M_1 a_1 + F_{R1}$$

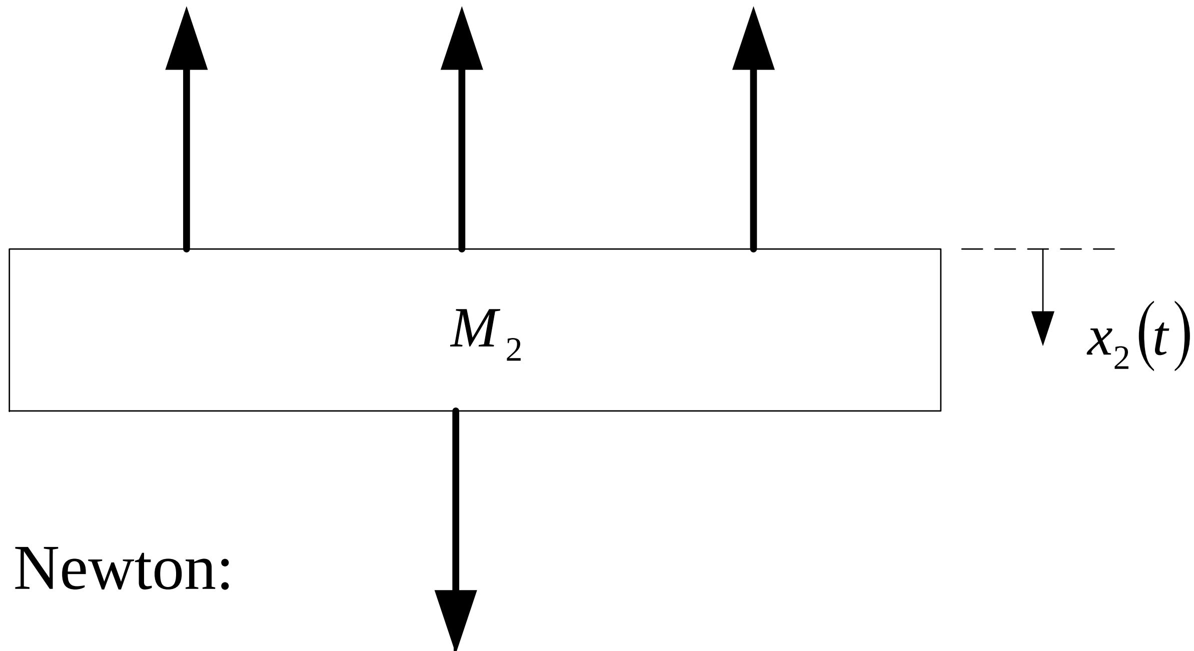
Sustituyendo las respectivas fuerzas se tiene:

$$f(t) = M_1 \frac{d^2 x_1(t)}{dt^2} + K_1[x_1(t) - x_2(t)]$$

# 1. Modelo Matemático de Sistemas Físicos

- Del cuerpo $M_2$ se tiene:

$$F_{\mathbf{B}2} = \frac{B}{2}\frac{dx_2(t)}{dt} \qquad F_{R2} = K_2 x_2(t) \qquad F_{\mathbf{B}1} = \frac{B}{2}\frac{dx_2(t)}{dt}$$




$$F_{R1} = K_1\left[x_1(t) - x_2(t)\right]$$

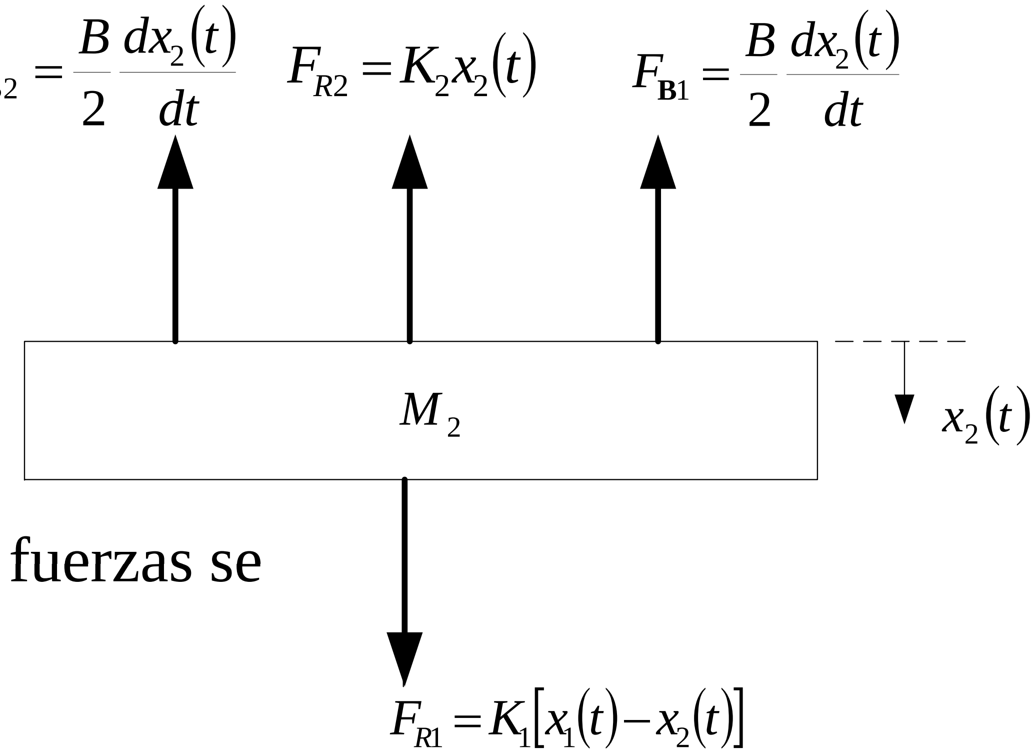
Aplicando la 2da Ley de Newton:

$$0 = M_2 a_2 + F_{R2} + F_{B1} + F_{B2} - F_{R1}$$



Dr. Francisco M. Gonzalez-Longatt, fglongatt@ieee.org

# 1. Modelo Matemático de Sistemas Físicos




Sustituyendo las respectivas fuerzas se tiene:

$$0 = M_2 \frac{d^2 x_2(t)}{dt^2} - K_1[x_1(t) - x_2(t)] + K_2 x_2(t) + B\frac{dx(t)}{dt}$$



Dr. Francisco M. Gonzalez-Longatt, fglongatt@ieee.org

# 1. Modelo Matemático de Sistemas Físicos

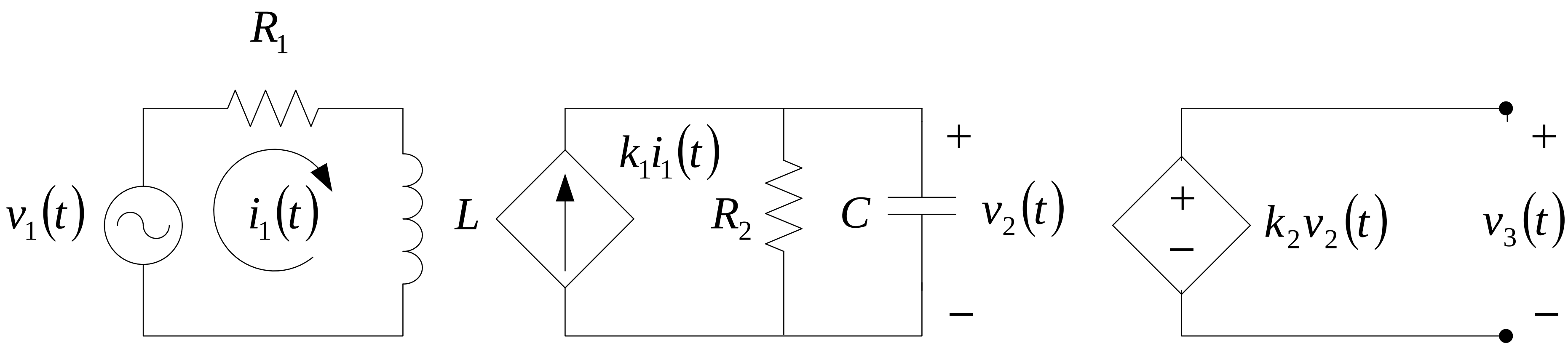
- El modelo dinámico del sistema queda dado por las siguientes ecuaciones diferenciales:

$$\begin{cases} M_2 \dfrac{d^2 x_2(t)}{dt^2} - K_1\left[x_1(t) - x_2(t)\right] + K_2 x_2(t) + B\dfrac{dx(t)}{dt} = 0 \\ M_1 \dfrac{d^2 x_1(t)}{dt^2} + K_1\left[x_1(t) - x_2(t)\right] = f(t) \end{cases}$$


Dr. Francisco M. Gonzalez-Longatt, fglongatt@ieee.org

# 2. Función de Transferencia

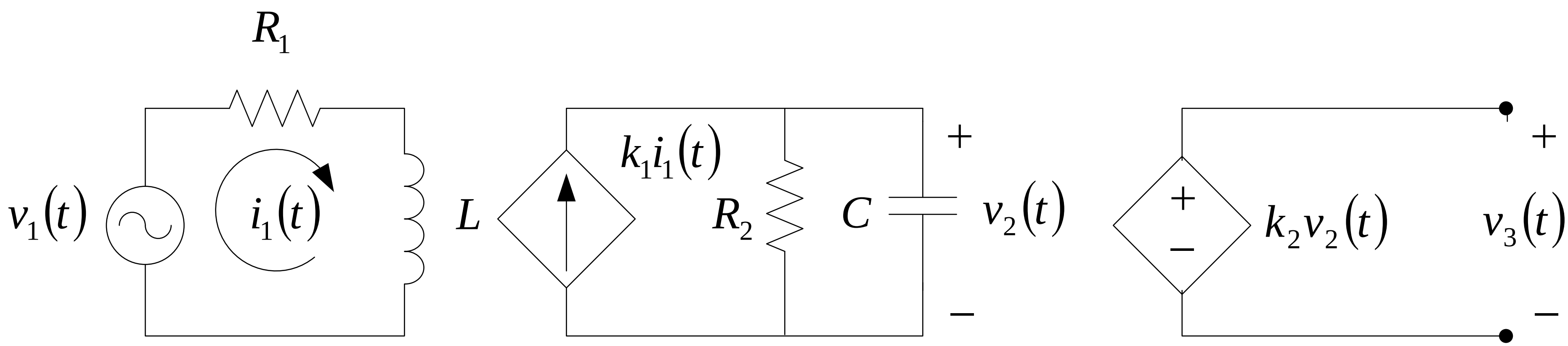
- Para la combinación de circuitos con fuentes dependientes, tal y como se muestra en la siguiente Figura.




- Determinar la función de transferencia $V_3(s)/V_1(s)$.

# 2. Función de Transferencia

- Se procede a establecer las ecuaciones circuitales que definen la mala de la entrada

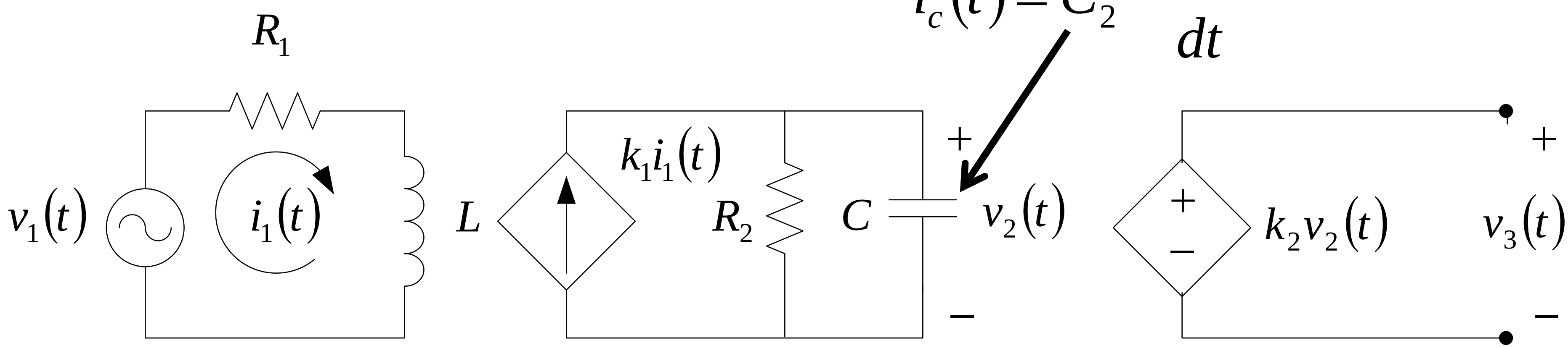


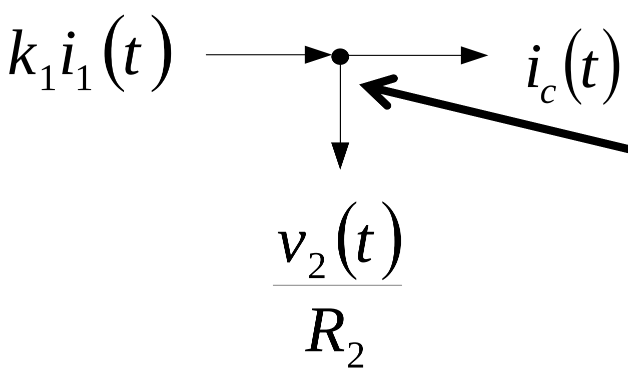

$$v_{in}(t) = R_1 i(t) + L\frac{di_1(t)}{dt}$$

# 2. Función de Transferencia

- En la segunda red acoplada, y se aplica la ley de corriente de Kirchoff:

$$i_c(t) = C_2\,\frac{dv_2(t)}{dt}$$



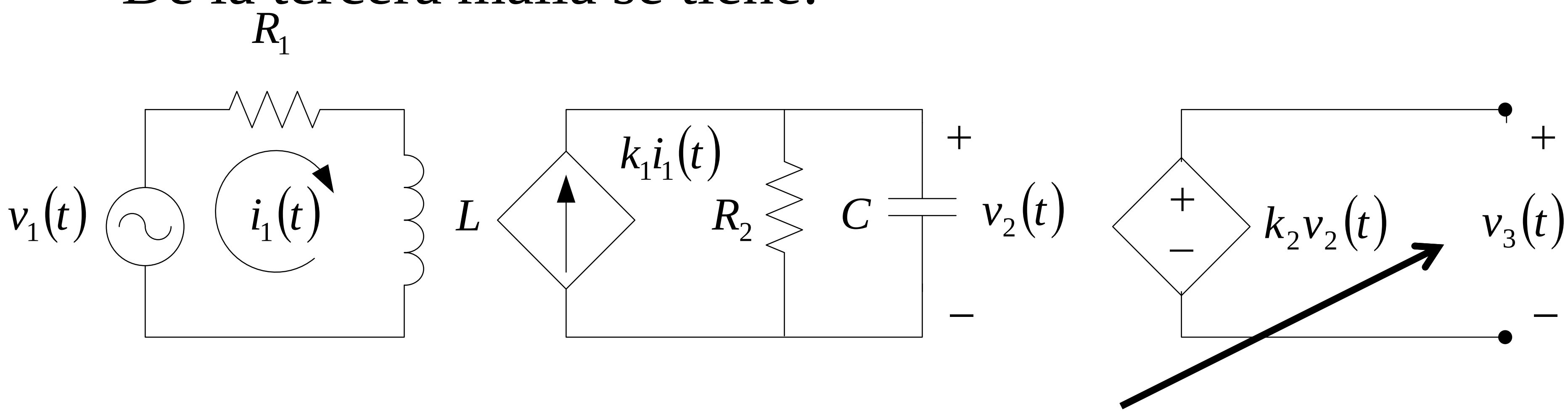

$$k_1 i_1(t) = \frac{v_2(t)}{R_2} + C_2\,\frac{dv_2(t)}{dt}$$



Dr. Francisco M. Gonzalez-Longatt, fglongatt@ieee.org

# 2. Función de Transferencia

- De la tercera malla se tiene:




$$v_{out}(t) = k_2 v_2(t)$$


Dr. Francisco M. Gonzalez-Longatt, fglongatt@ieee.org

# 2. Función de Transferencia

- El modelo dinámico del circuito resulta ser:

$$\begin{cases} k_1 i_1(t) = \dfrac{v_2(t)}{R_2} + C_2 \dfrac{dv_2(t)}{dt} \\ v_{out}(t) = k_2 v_2(t) \\ v_{in}(t) = R_1 i(t) + L \dfrac{di_1(t)}{dt} \end{cases}$$

- Se procede a aplicar transformada de Laplace en ambos lados de cada ecuación, considerando las condiciones iníciales nulas.


Dr. Francisco M. Gonzalez-Longatt, fglongatt@ieee.org

# 2. Función de Transferencia

- Aplicando transformada de Laplace resulta:

$$\begin{cases} v_{in}(t) = R_1 i(t) + L\dfrac{di_1(t)}{dt} \\ k_1 i_1(t) = \dfrac{v_2(t)}{R_2} + C_2\dfrac{dv_2(t)}{dt} \\ v_{out}(t) = k_2 v_2(t) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} V_{in}(s) = R_1 I_1(s) + sLI_1(s) \\ k_1 I_1(s) = \dfrac{V_2(s)}{R_2} + sC_2 V_2(s) \\ V_{out}(s) = k_2 V_2(s) \end{cases}$$


Dr. Francisco M. Gonzalez-Longatt, fglongatt@ieee.org

# 2. Función de Transferencia

- Se despeja $I_1$:

$$I_1(s) = \frac{V_{in}(s)}{R_1 + sL}$$

$$k_1 I_1(s) = \frac{V_2(s)}{R_2} + sC_2 V_2(s)$$

$$k_1 \frac{V_{in}(s)}{R_1 + sL} = V_2(s)\left[\frac{1}{R_2} + sC_2\right]$$

- Se opera matemáticamente:

$$V_{out} = \frac{k_2 R_2 k_1 V_{in}(s)}{(R_1 + sL)(1 + sR_2C_2)}$$


Dr. Francisco M. Gonzalez-Longatt, fglongatt@ieee.org

# 2. Función de Transferencia

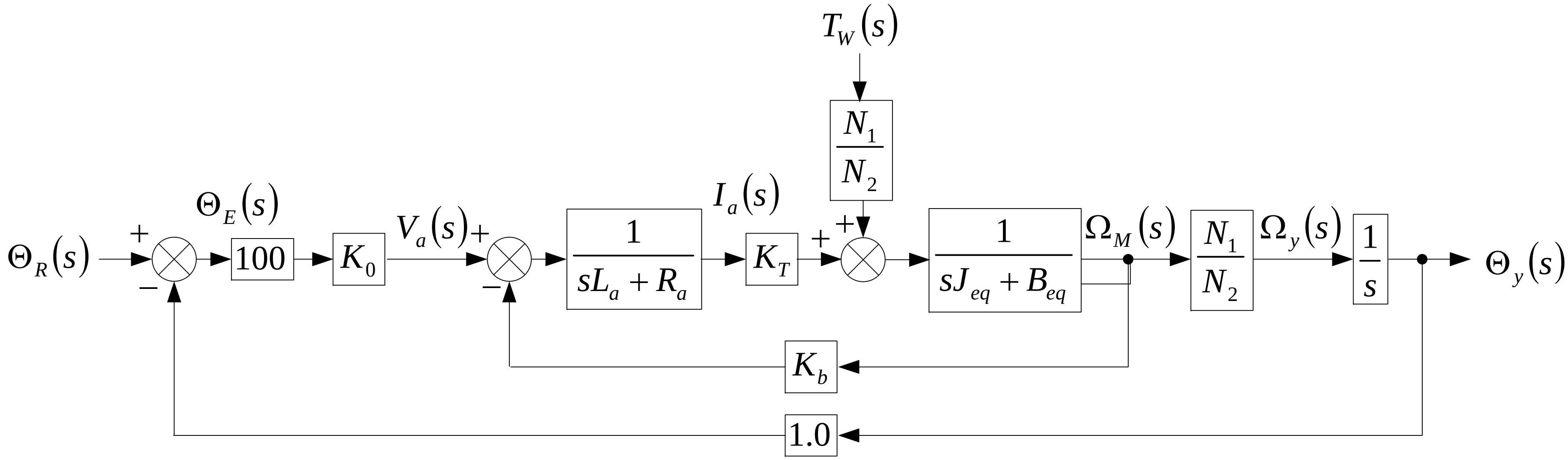
- Finalmente la función de transferencia resulta:

$$\frac{V_{out}}{V_{in}} = \frac{k_2 R_2 k_1}{(R_1 + sL)(1 + sR_2 C_2)}$$


Dr. Francisco M. Gonzalez-Longatt, fglongatt@ieee.org

# 3. Función de Transferencia

- Para el sistema de control mostrado en la Figura.




- Determine la representación en ecuación de estado



Dr. Francisco M. Gonzalez-Longatt, fglongatt@ieee.org

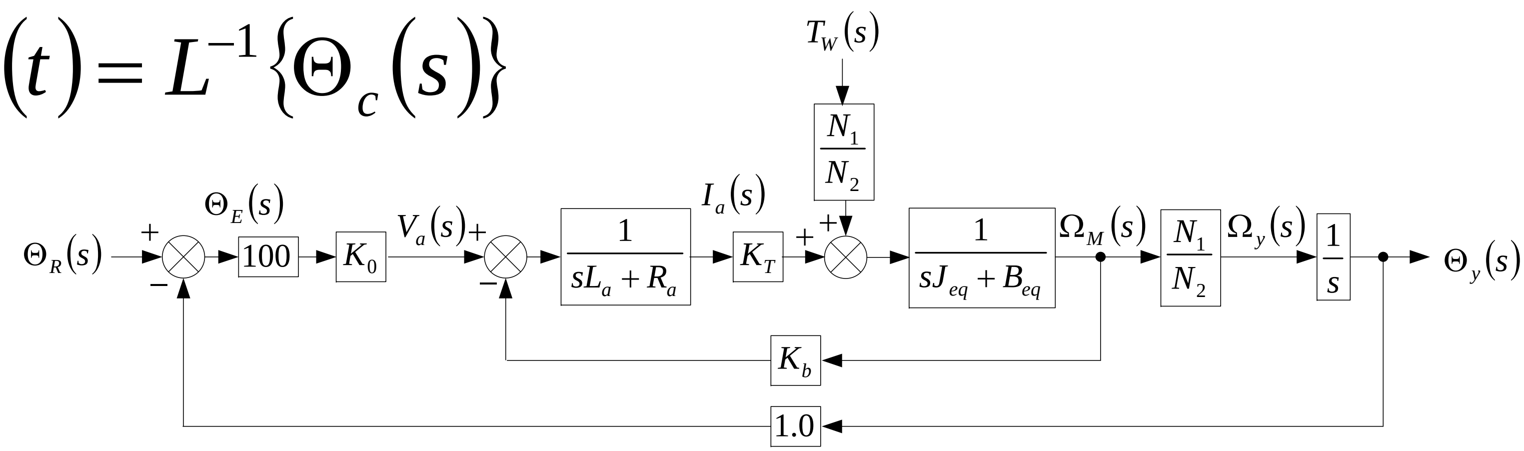
# 3. Función de Transferencia

- Para determinar la representación de estado del sistema se tiene que la entrada $\theta_R(t)$ y salida $\theta_y(t)$.
- Para las variables intermedias se tiene:

$$v_a(t) = L^{-1}\{V_a(s)\} \qquad i_a(t) = L^{-1}\{I_a(s)\}$$

$$\omega_m(t) = L^{-1}\{\Omega_M(s)\} \qquad \omega_y(t) = L^{-1}\{\Omega_y(s)\}$$

$$\theta_c(t) = L^{-1}\{\Theta_c(s)\}$$

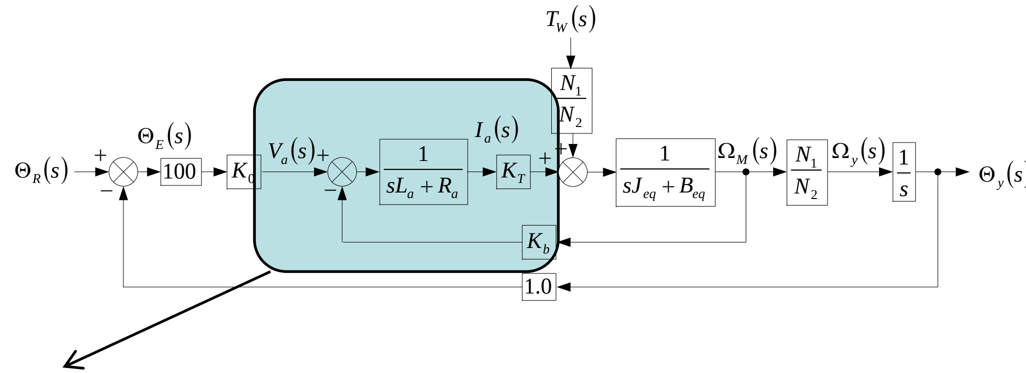


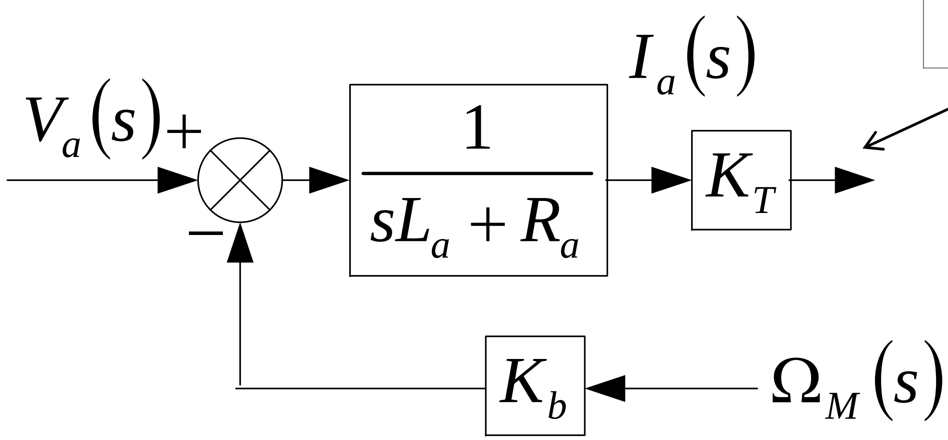


Dr. Francisco M. Gonzalez-Longatt, fglongatt@ieee.org

# 3. Función de Transferencia

- Tomando en cuenta esta sección del diagrama de bloques:



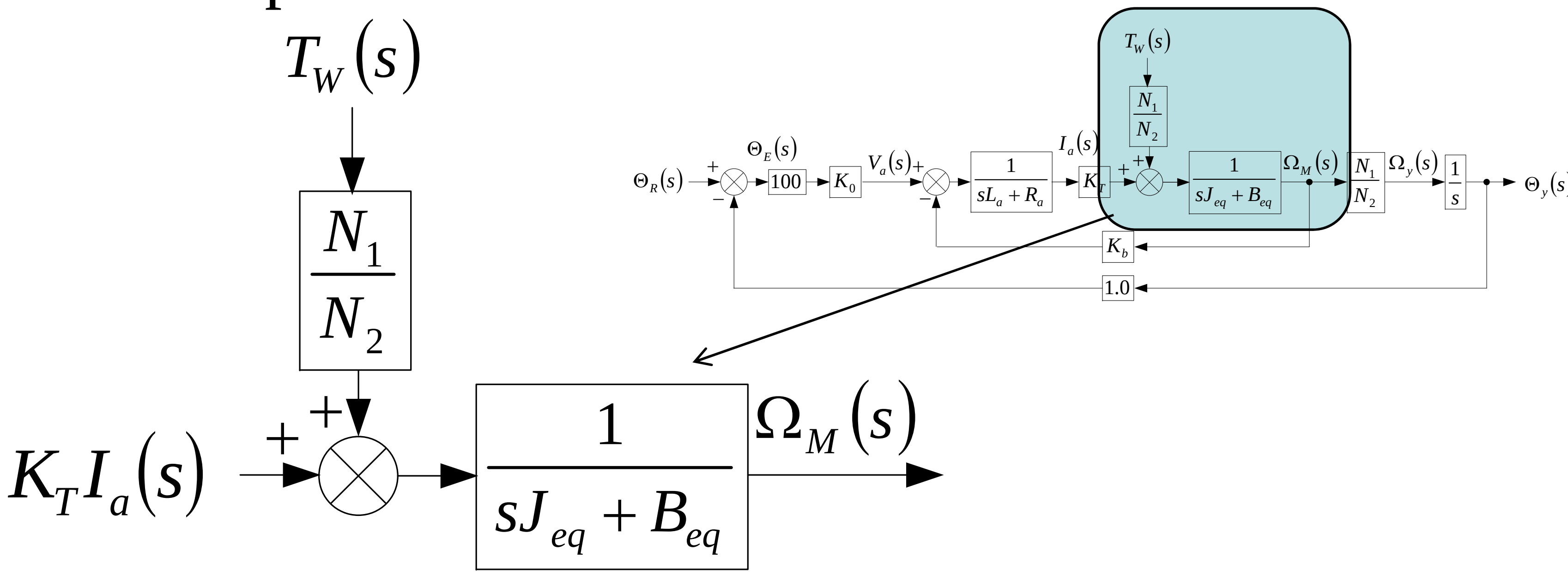

$$v_a(t) = L_a \frac{di_a}{dt} + R_a i_a + K_b \omega_m(t)$$



Dr. Francisco M. Gonzalez-Longatt, fglongatt@ieee.org

# 3. Función de Transferencia

- Para otra porción del sistema resulta:



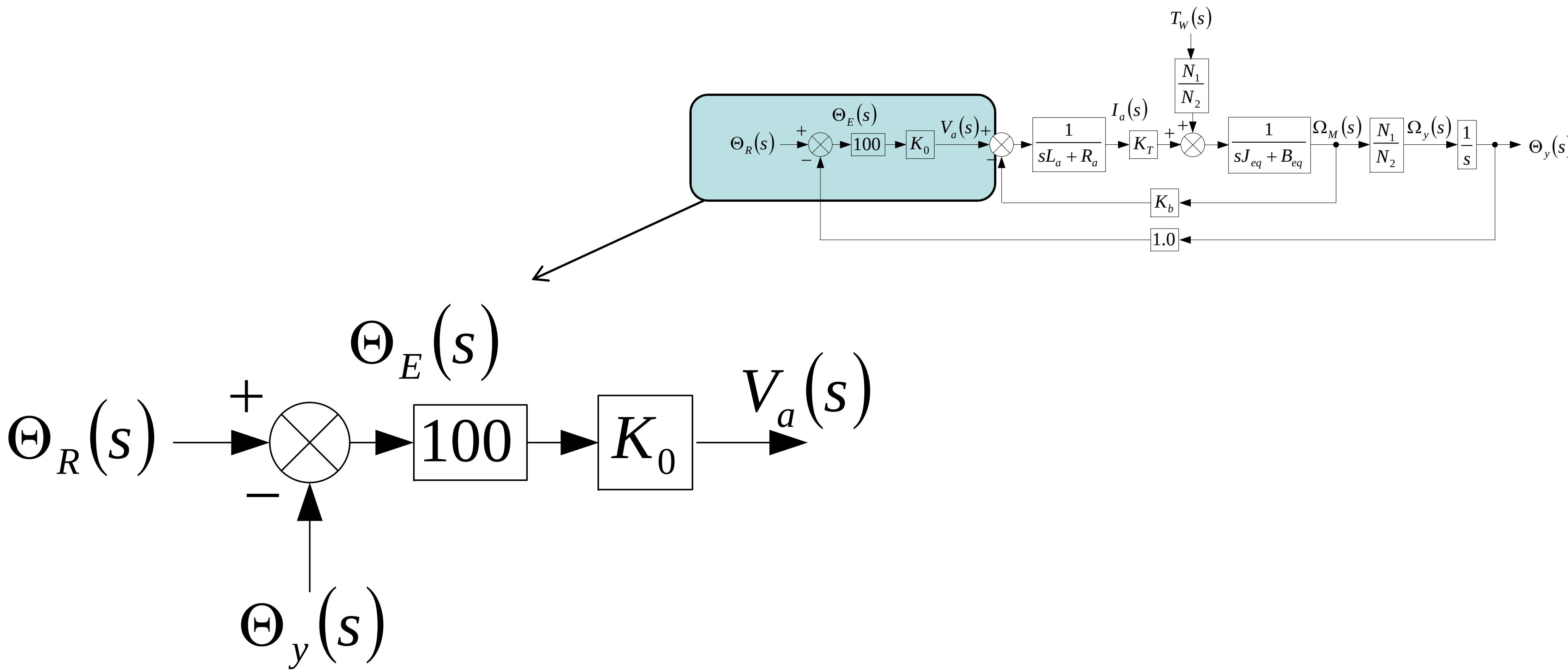

$$K_T i_a(t) + \frac{N_1}{N_2} T_W(t) = J_{EQ}\frac{d\omega_m}{dt} + B_{EQ}\omega_m$$



Dr. Francisco M. Gonzalez-Longatt, fglongatt@ieee.org

# 3. Función de Transferencia

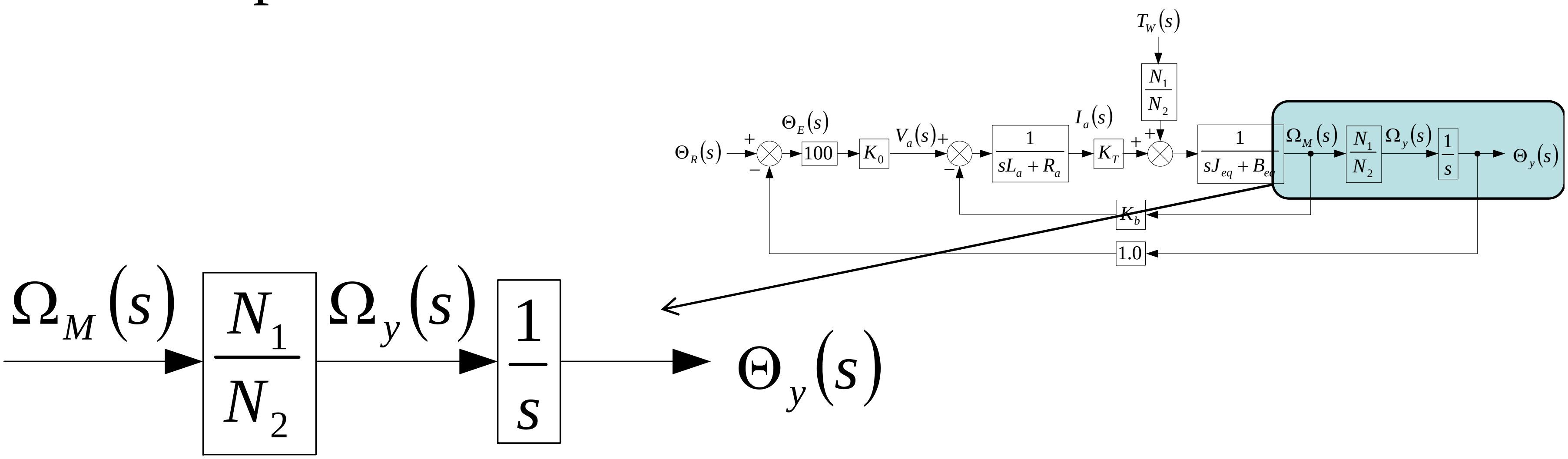
- Para la parte de la entrada se tiene:




$$v_a(t) = 100K_0\left[\theta_r(t) - \theta_y(t)\right]$$

# 3. Función de Transferencia

- Para la parte de la salida:




$$\omega_m(t)=\frac{N_1}{N_2}\frac{d\theta_y}{dt}$$



Dr. Francisco M. Gonzalez-Longatt, fglongatt@ieee.org

# 3. Función de Transferencia

- Finalmente el conjunto de ecuaciones que definen la dinámica son:

$$
\begin{cases}
v_a(t) = L_a \dfrac{di_a}{dt} + R_a i_a + K_b \omega_m(t) \\[2ex]
K_T i_a(t) + \dfrac{N_1}{N_2} T_W(t) = J_{EQ} \dfrac{d\omega_m}{dt} + B_{EQ}\omega_m \\[2ex]
\omega_m(t) = \dfrac{N_1}{N_2} \dfrac{d\theta_y}{dt}
\end{cases}
$$

$$
v_a(t) = 100 K_0 \left[\theta_r(t) - \theta_y(t)\right]
$$


Dr. Francisco M. Gonzalez-Longatt, fglongatt@ieee.org

# 3. Función de Transferencia

- Se construye la presentación de modelo de estado:

$$\begin{bmatrix} \dot{i}_a \\ \dot{\omega}_m \\ \dot{\theta}_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{R_a}{L_a} & -\frac{k_b}{L_a} & -\frac{100k_o}{L_a} \\ \frac{K_T}{J_{EQ}} & -\frac{B_{EQ}}{J_{EQ}} & 0 \\ 0 & \frac{N_1}{N_2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_a \\ \omega_m \\ \theta_y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{100k_o}{L_a} & 0 \\ 0 & \frac{N_1}{N_2 J_{EQ}} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_r \\ T_W \end{bmatrix}$$


Dr. Francisco M. Gonzalez-Longatt, fglongatt@ieee.org

# 3. Función de Transferencia

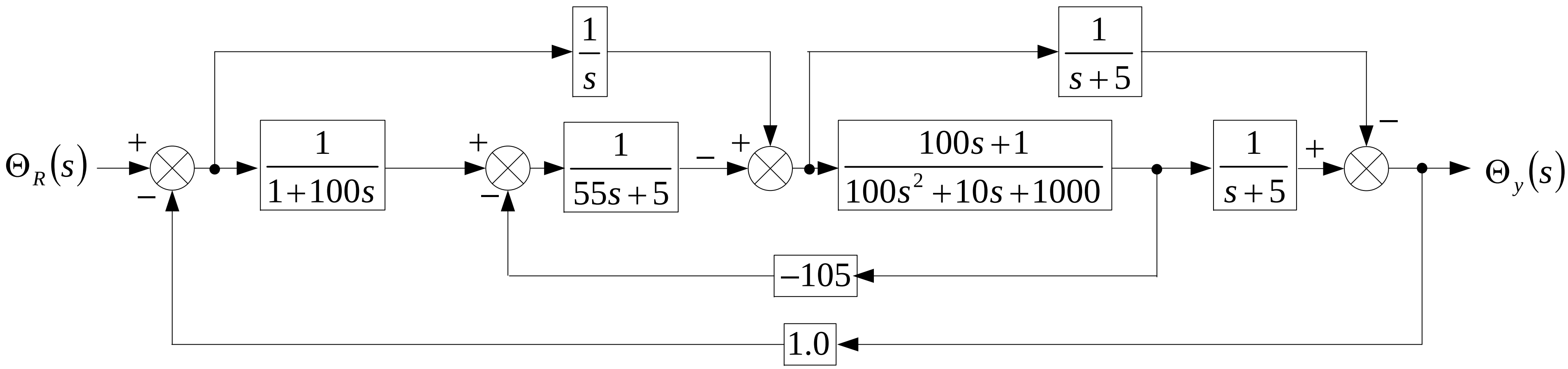
- Las ecuaciones algebraicas resultan ser:

$$\begin{bmatrix} \theta_e \\ \theta_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & \dfrac{N_1}{N_2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_a \\ \omega_m \\ \theta_y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_r \\ T_W \end{bmatrix}$$


Dr. Francisco M. Gonzalez-Longatt, fglongatt@ieee.org

# 4. Reducción de Diagrama de Bloques

- Determine el diagrama de bloque equivalente reducido del siguiente sistema.

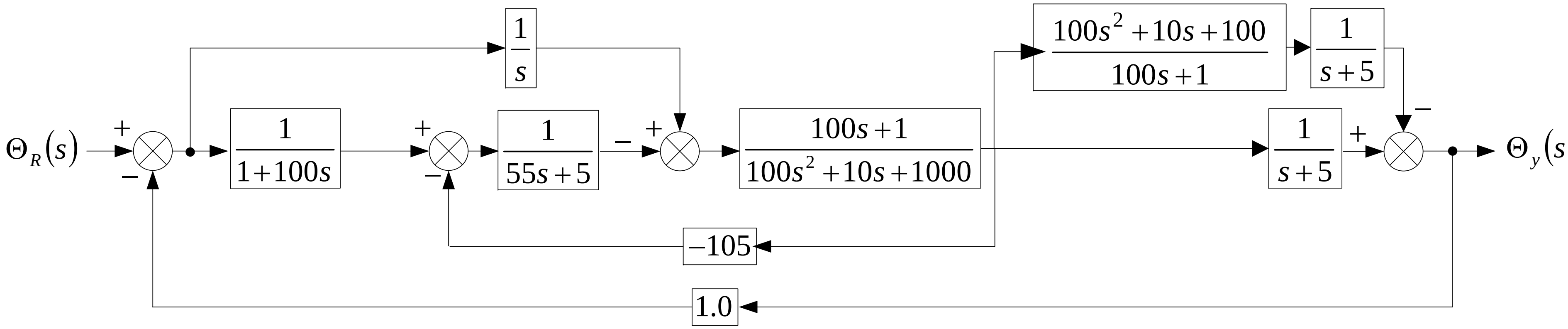




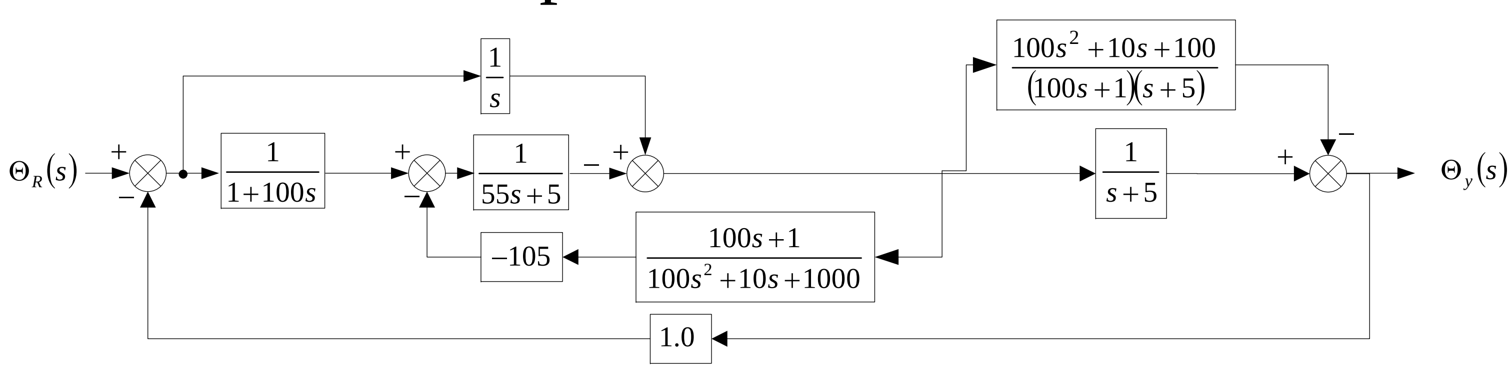

Dr. Francisco M. Gonzalez-Longatt, fglongatt@ieee.org

# 4. Reducción de Diagrama de Bloques

- Se modifica la posición de un punto de bifurcación.




- Se modifica la posición de un punto de bifurcación, y se efectúa una simplificación de cascada.

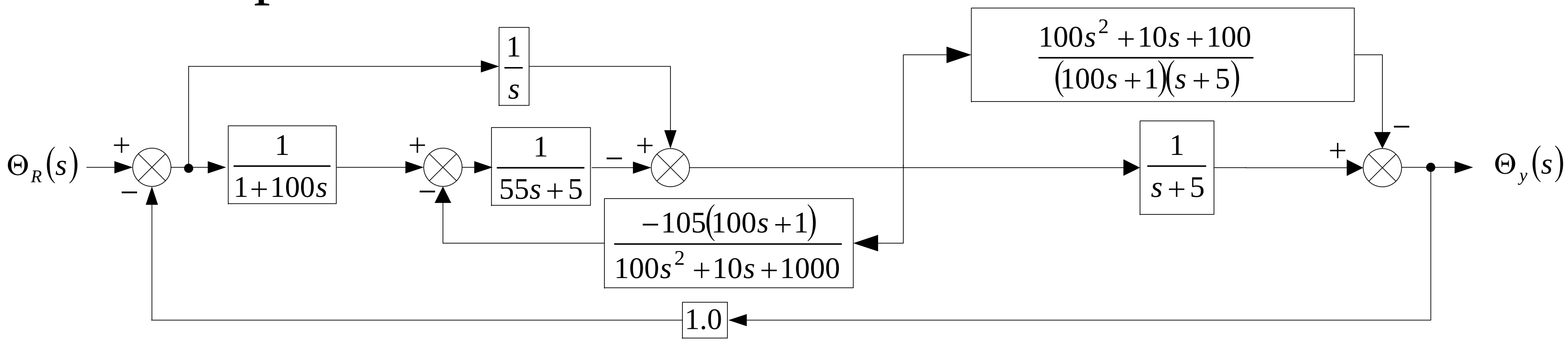




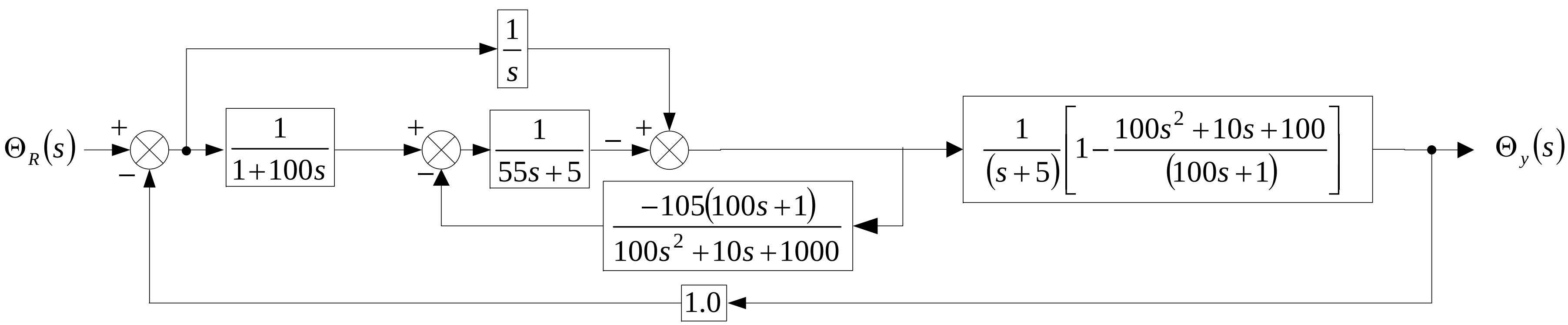

Dr. Francisco M. Gonzalez-Longatt, fglongatt@ieee.org

# 4. Reducción de Diagrama de Bloques

- Se simplifica otra cascada.




- Se simplifica la sumatoria

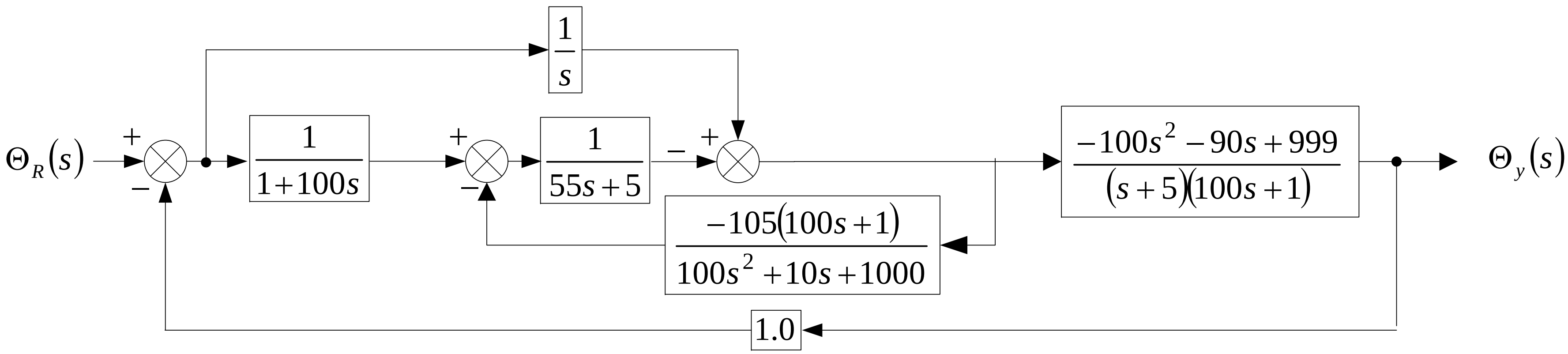





Dr. Francisco M. Gonzalez-Longatt, fglongatt@ieee.org

# 4. Reducción de Diagrama de Bloques

- Afectando sumas y simplificando:




- Finalmente resulta:

$$\Theta_R(s) \longrightarrow \boxed{\frac{\left(-20s^2-2s-200\right)\left(554s+5500s^2+5\right)\left(100s^2-90s+999\right)}{11000000s^7+45520000s^6+146339100s^5\,442042430s^4+90179752s^3-1089947161s^2-110608085s-999000}} \longrightarrow \Theta_y(s)$$



Dr. Francisco M. Gonzalez-Longatt, fglongatt@ieee.org