Lugar Geométrico de las Raíces

Prof. Francisco M. Gonzalez-Longatt
fglongatt@ieee.org
http://www.giaelec.org/fglongatt/SP.htm

1. Introducción

- La característica básica de la respuesta transitoria de un sistema en lazo cerrado *se relaciona estrechamente con la ubicación de los polos en lazo cerrado*.
- Si el sistema tiene una ganancia de lazo variable, la ubicación de los polos en lazo cerrado depende del valor de la ganancia de lazo elegida.
- Es importante que el diseñador *conozca cómo se mueven los polos en lazo cerrado en el plano s conforme varía la ganancia de lazo*.

Francisco M. Gonzalez-Longatt, fglongatt@ieee.org

1. Introducción

- Desde el punto de vista del diseño, *un simple ajuste de la ganancia en algunos sistemas mueve los polos en lazo cerrado* a las posiciones deseadas.
- Aaqui el problema de diseño se centra en la *selección de un valor de ganancia adecuada*.
- Si el ajuste de la ganancia no produce por sí solo un resultado conveniente, será necesario *agregar al sistema un compensador*.
- Los *polos en lazo cerrado son las raíces de la ecuación característica*.

Francisco M. Gonzalez-Longatt, fglongatt@ieee.org

1. Introducción

- W. R. Evans diseñó un método sencillo para *encontrar las raíces de la ecuación característica, que se usa ampliamente en la ingeniería de control*.
- Se denomina *método del lugar geométrico de las raíces, y en él se grafican las raíces de la ecuación característica para todos los valores de un parámetro del sistema*.

Francisco M. Gonzalez-Longatt, fglongatt@ieee.org

2. Método del Lugar Geométrico de las Raíces

- La idea básica detrás del método del LGR es que los valores que hacen que la función de transferencia alrededor del lazo sea igual a - 1 deben satisfacer la ecuación característica del sistema.
- El método debe su nombre al *lugar geométrico de las raíces de la ecuación característica del sistema en lazo cerrado* conforme la ganancia varía de cero a infinito.
- Dicha gráfica muestra claramente cómo contribuye cada polo o cero en lazo abierto a las posiciones de los polos en lazo cerrado.

Francisco M. Gonzalez-Longatt, fglongatt@ieee.org

2. Método del Lugar Geométrico de las Raíces

- El método del LGR resulta muy útil, dado que indica la forma en la que deben modificarse los polos y ceros en lazo abierto para que la respuesta cumpla las especificaciones de desempeño del sistema.
- Algunos sistemas de control pueden tener más de un parámetro que deba ajustarse.
- El diagrama del LGR, para un sistema que tiene parámetros múltiples, se construye variando un parámetro a la vez.

Francisco M. Gonzalez-Longatt, fglongatt@ieee.org

2. Método del Lugar Geométrico de las Raíces

- En la mayor parte de los casos, el parámetro del sistema es la ganancia de lazo *K*, aunque el parámetro puede ser cualquier otra variable del sistema.
- Si el diseñador sigue las reglas generales para construir los lugares geométricos, le resultará sencillo trazar los LGR de un sistema específico.

Francisco M. Gonzalez-Longatt, fglongatt@ieee.org

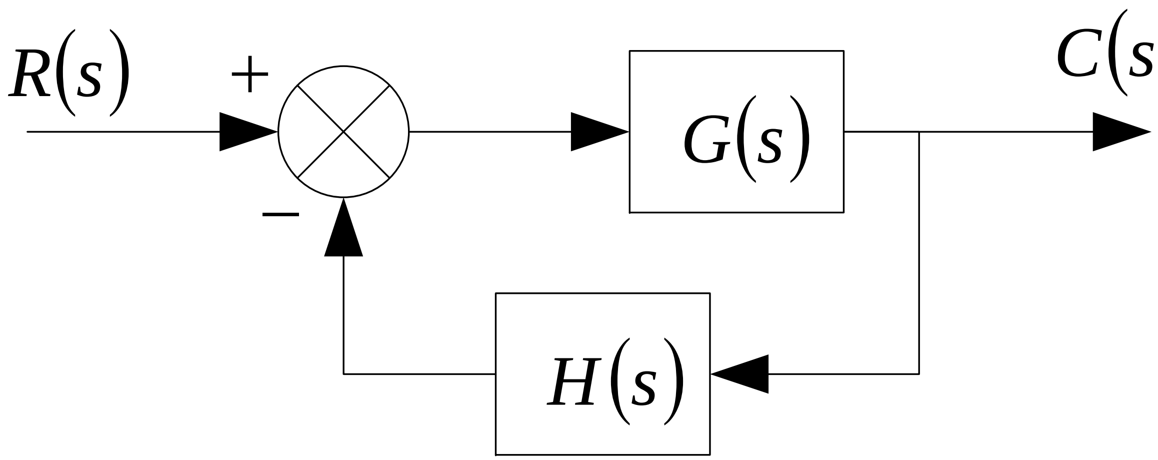
2. Método del Lugar Geométrico de las Raíces

- Debido a que generar los lugares geométricos de las raíces usando MATLAB es muy simple, se podría pensar que trazar los lugares geométricos de las raíces en forma manual es una pérdida de tiempo y esfuerzo.
- Una *buena forma de interpretar los LG generados por la computadora es adquirir la experiencia de trazar los lugares geométricos en forma manual, cosa que, además, proporciona con mucha rapidez una idea global de los lugares geométricos*.

Francisco M. Gonzalez-Longatt, fglongatt@ieee.org

3. Condiciones de Angulo y Magnitud

- Considere el sistema de control realimentado mostrado en la Figura siguiente.



Sistema de Control Realimentado

Francisco M. Gonzalez-Longatt, fglongatt@ieee.org

3. Condiciones de Angulo y Magnitud

- La función de transferencia de lazo cerrado es:

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1+G(s)H(s)}$$

- La ecuación característica para este sistema en lazo cerrado se obtiene haciendo que el denominador del segundo miembro de la ecuación anterior sea igual a cero:

$$1+G(s)H(s)=0$$

$$G(s)H(s)=-1$$

Francisco M. Gonzalez-Longatt, fglongatt@ieee.org

3. Condiciones de Angulo y Magnitud

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1+G(s)H(s)}$$

$$G(s)H(s) = -1$$

- Los valores de *s* que cumplen tanto las condiciones de ángulo como las de magnitud son las raíces de la ecuación característica, o los polos en lazo cerrado.
- El LGR es una gráfica de los puntos del plano complejo que sólo satisfacen la condición de ángulo.

Francisco M. Gonzalez-Longatt, fglongatt@ieee.org

3. Condiciones de Angulo y Magnitud

- Las raíces de la ecuación característica (los polos en lazo cerrado) que corresponden a un valor específico de la ganancia se determinan a partir de la condición de magnitud.

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1+G(s)H(s)}$$

$$G(s)H(s) = -1$$

Francisco M. Gonzalez-Longatt, fglongatt@ieee.org

3. Condiciones de Angulo y Magnitud

- En muchos casos, $G(s)H(s)$ contiene un parámetro de ganancia K, y la ecuación característica se escribe como:

$$1+\frac{K(s+z_1)(s+z_2)\ldots(s+z_m)}{(s+p_1)(s+p_2)\ldots(s+p_n)}$$

- Entonces, los lugares geométricos de las raíces para el sistema son los lugares geométricos de los polos en lazo cerrado conforme la ganancia K varía de cero a infinito.

Francisco M. Gonzalez-Longatt, fglongatt@ieee.org

3. Condiciones de Angulo y Magnitud

- Observe que, para empezar a trazar los LGR de un sistema mediante el método analizado aquí, se debe conocer la ubicación de los polos y los ceros de $G(s)H(s)$.
- Recuerde que los ángulos de las cantidades complejas que se originan a partir de los polos y los ceros en lazo abierto para el punto de prueba s se miden en sentido contrario al de las manecillas del reloj.

Francisco M. Gonzalez-Longatt, fglongatt@ieee.org

3. Condiciones de Angulo y Magnitud

- Por ejemplo si *G*(*s*)*H*(*s*) se obtiene mediante:

$$G(s)H(s) = \frac{K(s+z_1)}{(s+p_1)(s+p_2)(s+p_3)(s+p_4)}$$

- En este caso, $-p_2$, $-p_3$, son polos complejos conjugados de *G*(*s*)*H*(*s*) es:

$$\angle G(s)H(s) = \phi_1 - \theta_1 - \theta_2 - \theta_3 - \theta_4$$

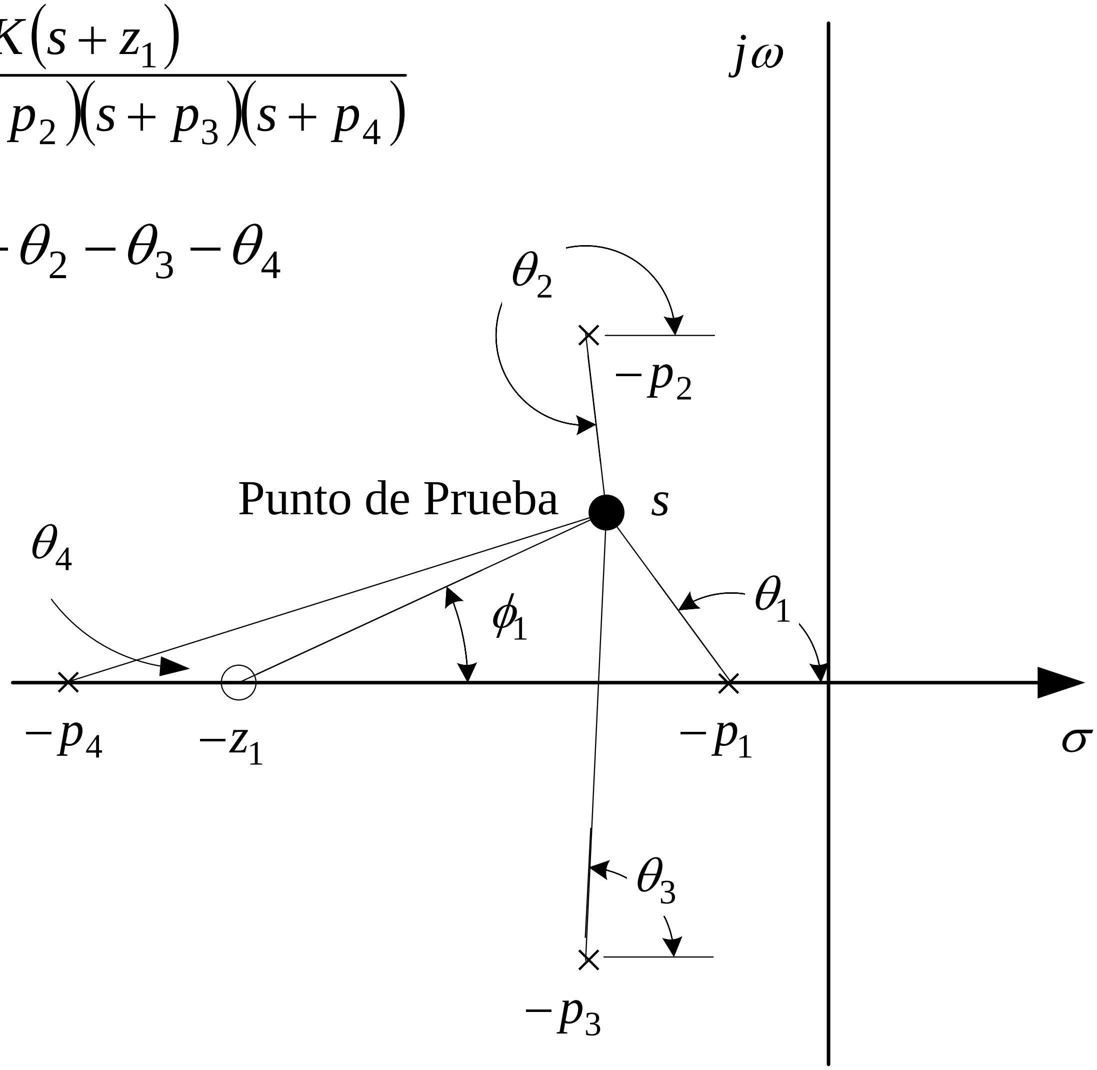
- En donde los ángulos se miden en sentido contrario a las manecillas del reloj,

Francisco M. Gonzalez-Longatt, fglongatt@ieee.org

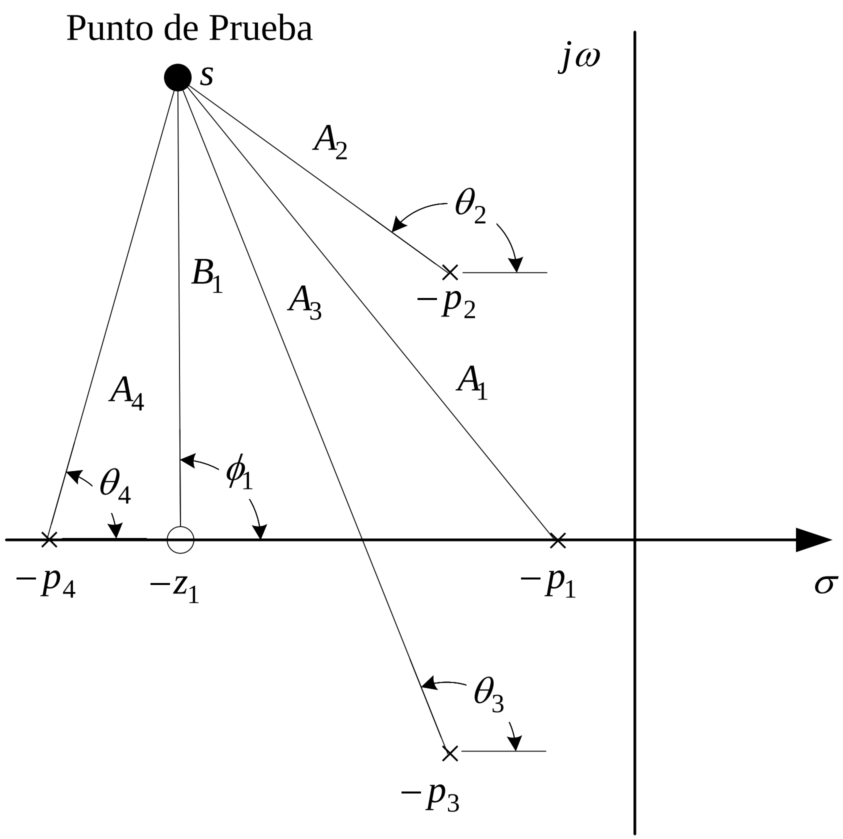
3. Condiciones de Angulo y Magnitud

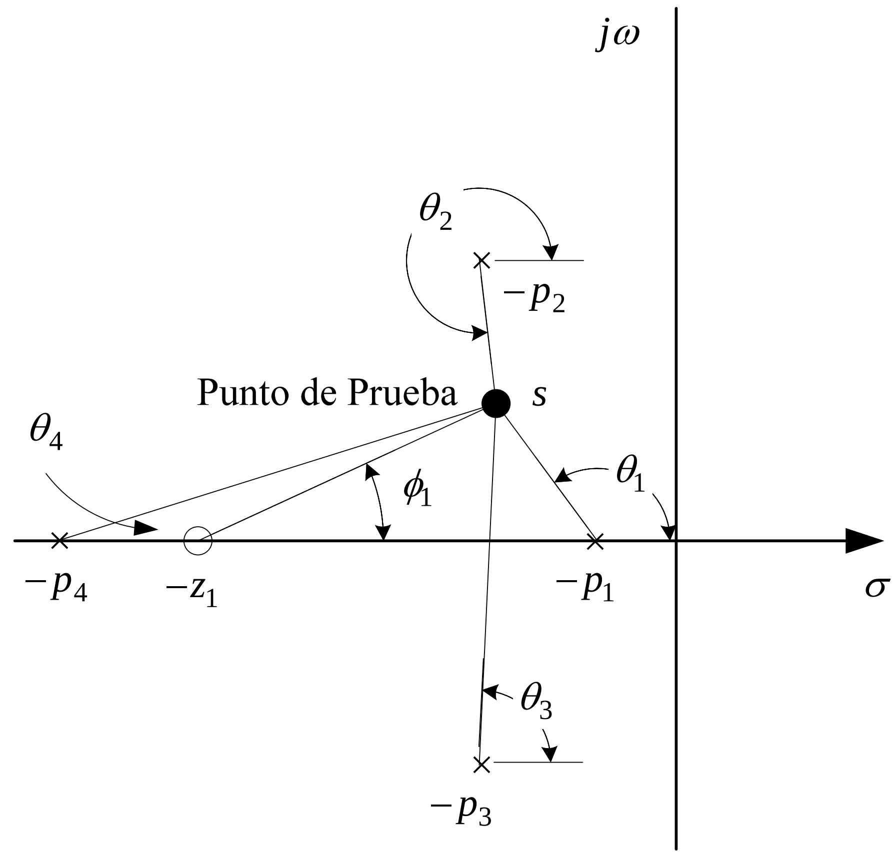
$$G(s)H(s) = \frac{K(s+z_1)}{(s+p_1)(s+p_2)(s+p_3)(s+p_4)}$$

$$\angle G(s)H(s) = \phi_1 - \theta_1 - \theta_2 - \theta_3 - \theta_4$$



3. Condiciones de Angulo y Magnitud





Francisco M. Gonzalez-Longatt, fglongatt@ieee.org

3. Condiciones de Angulo y Magnitud

- Mientras que la magnitud de la función de transferencia $G(s)H(s)$ es:

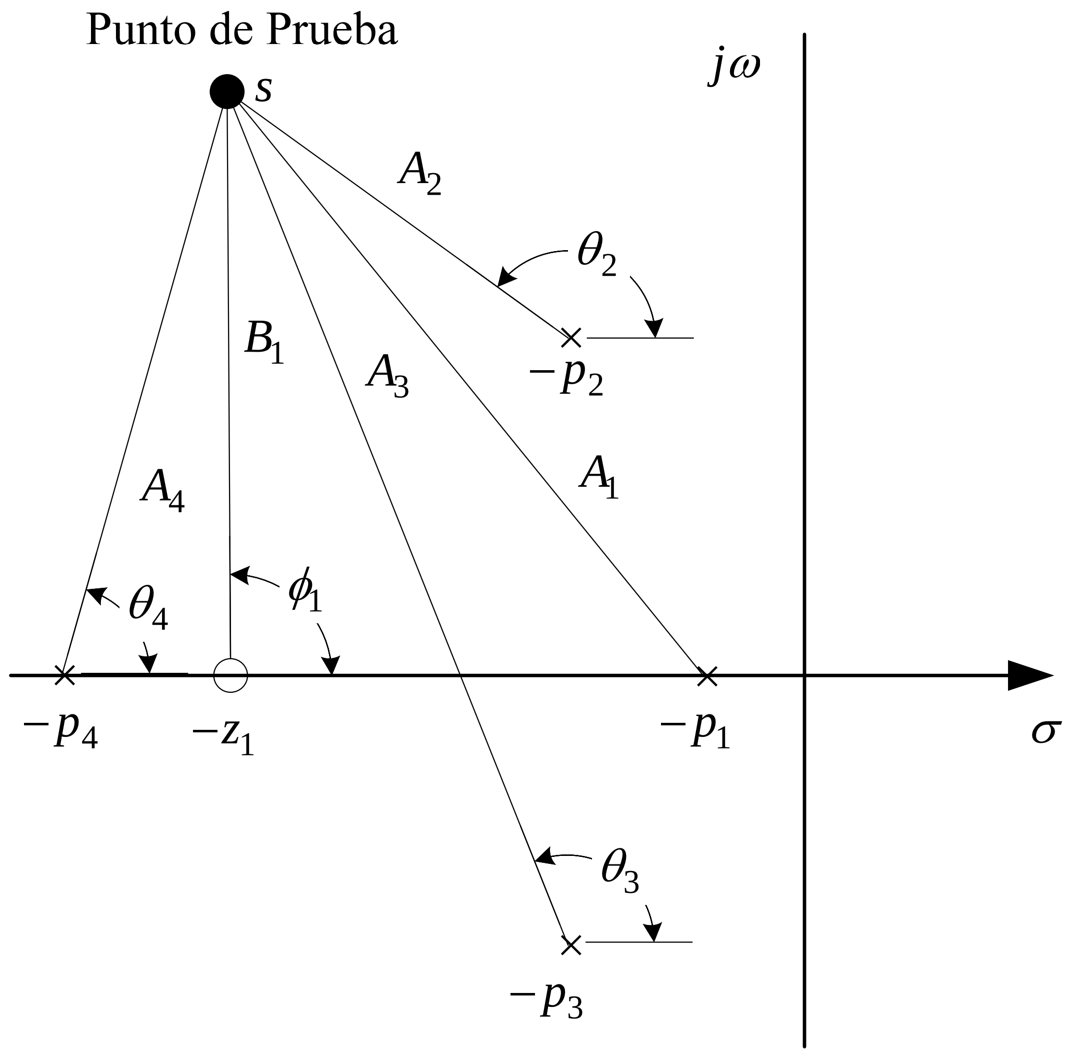
$$\left|G(s)H(s)\right| = \frac{KB_1}{A_1 A_2 A_3 A_4}$$

- En donde A_1, A_2, A_3, A_4 y B_1 son magnitudes de las cantidades complejas $s+p_1$, $s+p_2$, $s+p_3$, $s+p_4$, y $s+z_1$, respectivamente

Francisco M. Gonzalez-Longatt, fglongatt@ieee.org

3. Condiciones de Angulo y Magnitud

$$\left|G(s)H(s)\right| = \frac{KB_1}{A_1 A_2 A_3 A_4}$$



Francisco M. Gonzalez-Longatt, fglongatt@ieee.org

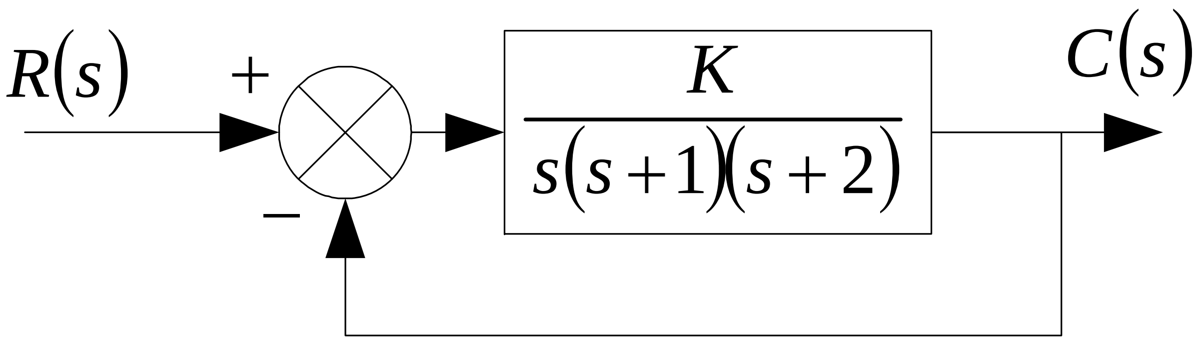
3. Condiciones de Angulo y Magnitud

- Observe que, debido a que los polos complejos conjugados y los ceros complejos conjugados en lazo abierto, si existen, *siempre se ubican simétricamente con respecto al eje real, los lugares geométricos de las raíces siempre son simétricos con respecto a este eje*.
- Por tanto, sólo es necesario construir la mitad superior de los lugares geométricos de las raíces y dibujar la *imagen espejo de la mitad superior en el plano s inferior*.

Francisco M. Gonzalez-Longatt, fglongatt@ieee.org

4. Ejemplo

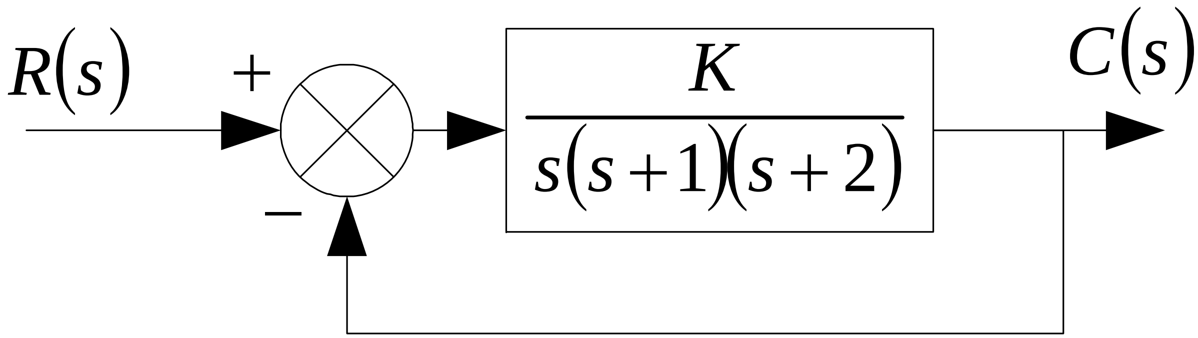
- Considere el sistema de la Figura, se supone que el valor de la ganancia K es no negativo.



Sistema de control para el Ejemplo 1

Francisco M. Gonzalez-Longatt, fglongatt@ieee.org

4. Ejemplo



- Para este sistema se tiene:

$$
\begin{cases}
G(s) = \dfrac{K}{s(s+1)(s+2)} \\
\\
H(s) = 1
\end{cases}
$$

Francisco M. Gonzalez-Longatt, fglongatt@ieee.org

4. Ejemplo

- Se trazará la gráfica del lugar geométrico de las raíces
- Después se determinará el valor de K tal que el factor de amortiguamiento relativo ξ de los polos dominantes complejos conjugados en lazo abierto sea 0.5.

Francisco M. Gonzalez-Longatt, fglongatt@ieee.org

4. Resolución

- Para el sistema mostrado, la condición de ángulo se convierte en:

$$\left\langle G(s) = \left\langle \frac{K}{s(s+1)(s+2)} \right.\right.$$

$$\angle G(s) = -\angle s - \angle(s+1) - \angle(s+2)$$

$$= \pm 180^\circ (2k+1) \quad \text{para } k = 1,\ 2,\ \ldots$$

Francisco M. Gonzalez-Longatt, fglongatt@ieee.org

4. Resolución

- Un procedimiento común para trazar la grafica del lugar geométrico de las raíces es el siguiente:

1. *Determine los lugares geométricos de las raíces sobre el eje real.*
2. *Determine las asíntotas de los lugares geométricos de las raíces.*
3. *Determine el punto de ruptura o desprendimiento.*
4. *Determine los puntos en donde los lugares geométricos de las raíces cruzan el eje imaginario.*
5. *Seleccione un punto de prueba en una vecindad amplia del eje* $s = j\omega$ *y el origen.*
6. *Dibuje los lugares geométricos de las raíces, con base en la información obtenida en los pasos anteriores*

Francisco M. Gonzalez-Longatt, fglongatt@ieee.org

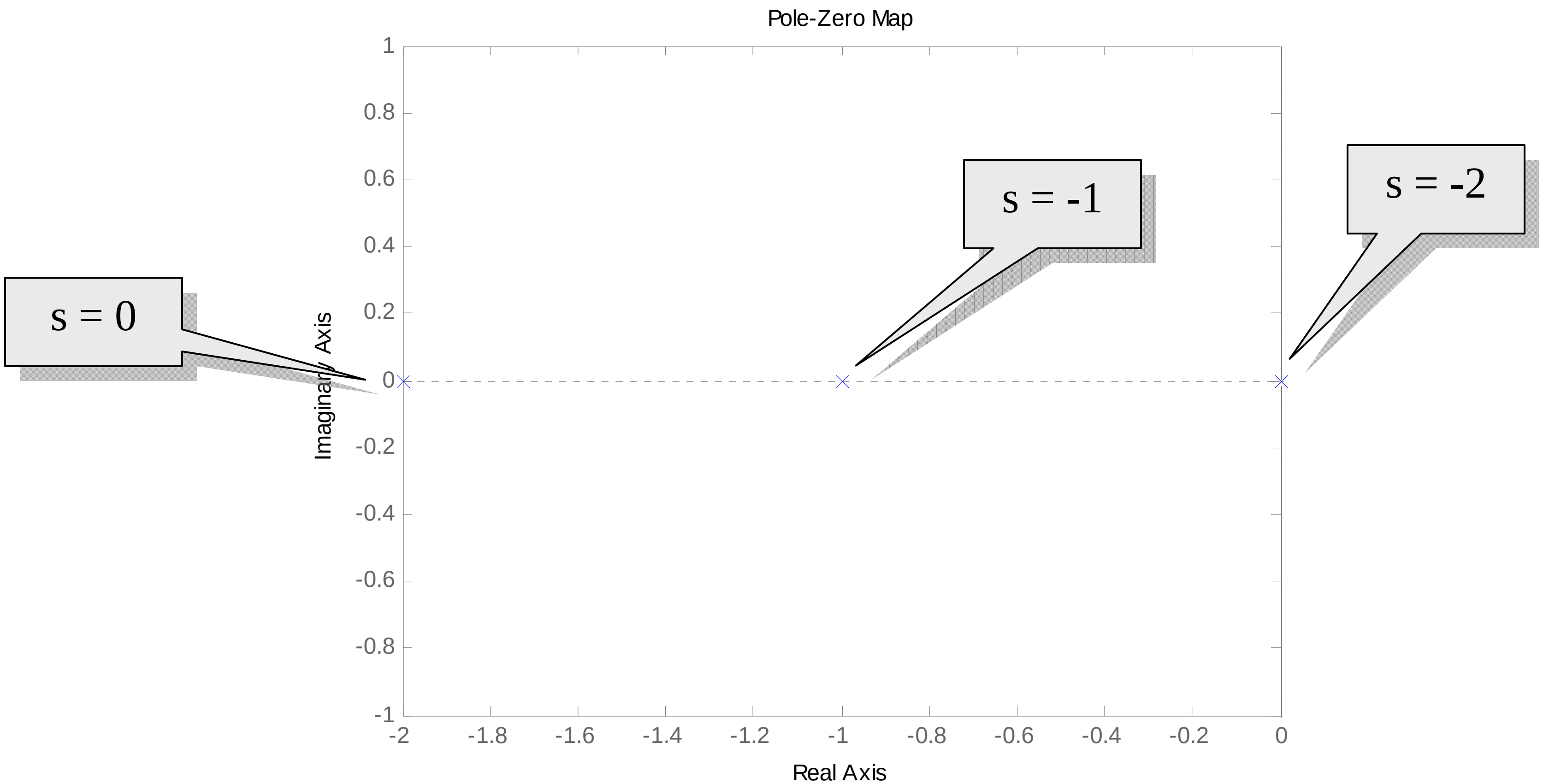
4.1. *Lugares geométricos de las raíces sobre el eje real*.

- El primer paso al construir una gráfica del LGR es ubicar los polos en lazo abierto, $s = 0$, $s = -1$ y $s = -2$, en el plano complejo.
- En este sistema *no hay ceros en lazo abierto*.
- Las ubicaciones de los polos en lazo abierto se señalan mediante cruces.
- Las ubicaciones de los ceros en lazo abierto se señalan por círculos.

Francisco M. Gonzalez-Longatt, fglongatt@ieee.org

4.1. *Lugares geométricos de las raíces sobre el eje real.*

- Polos en lazo abierto, $s = 0$, $s = -1$ y $s = -2$, en el plano complejo.



Francisco M. Gonzalez-Longatt, fglongatt@ieee.org

4.1. *Lugares geométricos de las raíces sobre el eje real*.

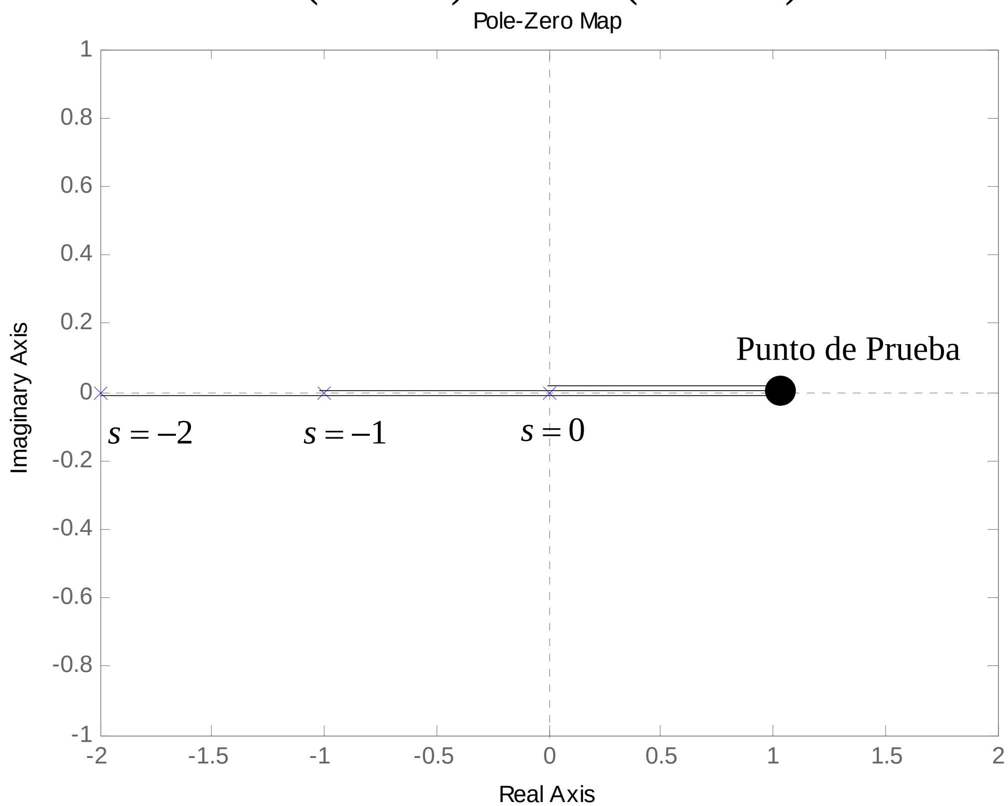
- Observe que los puntos iniciales de los lugares geométricos de las raíces (los puntos que corresponden a $K = 0$) son los polos en lazo abierto.
- *Los lugares geométricos de raíces individuales para este sistema son tres, lo cual es igual al número de polos en lazo abierto*.
- *Para determinar los lugares geométricos de las raíces sobre el eje real*, se selecciona un punto de prueba, s.

Francisco M. Gonzalez-Longatt, fglongatt@ieee.org

4.1. *Lugares geométricos de las raíces sobre el eje real.*

- Si el punto de prueba está en el eje real positivo, entonces:

$$\angle s = \angle(s+1) = \angle(s+2) = 0$$



Francisco M. Gonzalez-Longatt, fglongatt@ieee.org

4.1. *Lugares geométricos de las raíces sobre el eje real.*

- Si el punto de prueba está en el eje real positivo, entonces:

$$\angle s = \angle(s+1) = \angle(s+2) = 0$$

- Esto demuestra que no es posible satisfacer la condición de ángulo.
- Por tanto, *no hay un lugar geométrico de las raíces sobre el eje real positivo*.

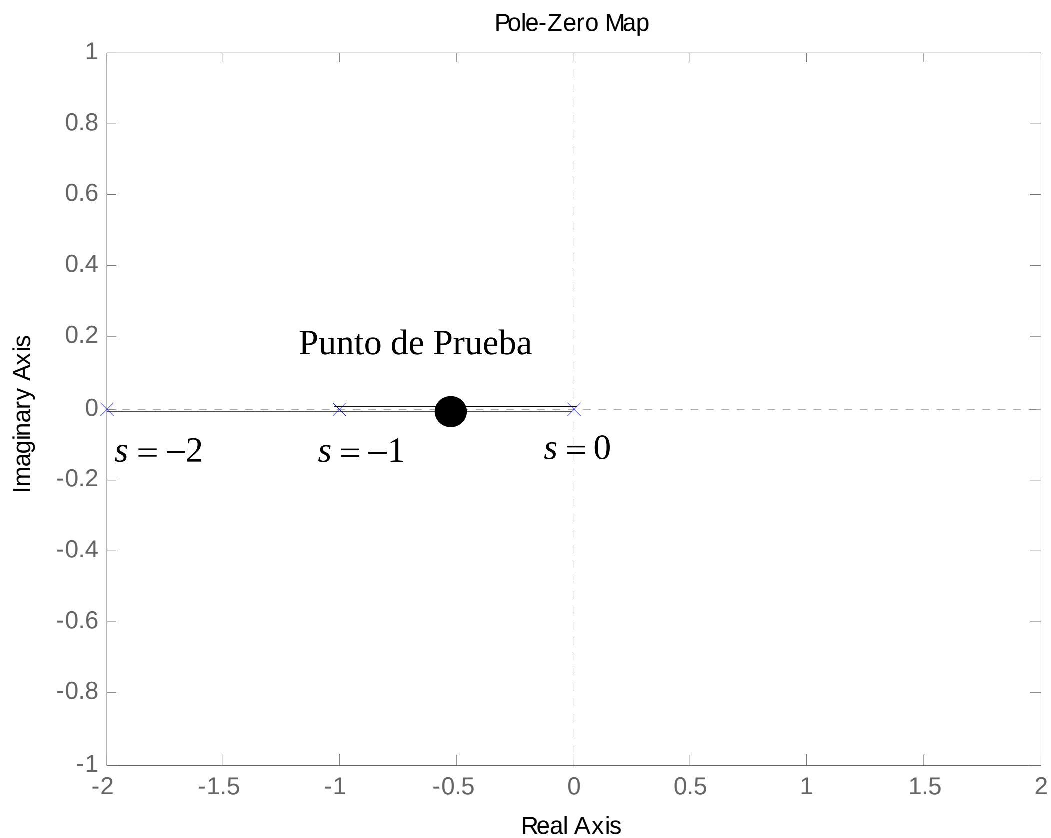
Francisco M. Gonzalez-Longatt, fglongatt@ieee.org

4.1. *Lugares geométricos de las raíces sobre el eje real.*

- A continuación, se selecciona un punto de prueba sobre el eje real negativo entre 0 y -1. Así:

$$\angle s = 180$$
$$\angle (s+1) = 0$$
$$\angle (s+2) = 0$$

$$-\angle s - \angle (s+1) - \angle (s+2) = -180$$



Francisco M. Gonzalez-Longatt, fglongatt@ieee.org

4.1. *Lugares geométricos de las raíces sobre el eje real.*

$$\angle s = 180$$

$$\angle(s+1) = 0$$

$$\angle(s+2) = 0$$

$$-\angle s - \angle(s+1) - \angle(s+2) = -180$$

- Se satisface la condición de ángulo.
- Así, la parte del eje real negativo entre 0 y - 1 *forma parte del lugar geométrico de las raíces*.

Francisco M. Gonzalez-Longatt, fglongatt@ieee.org

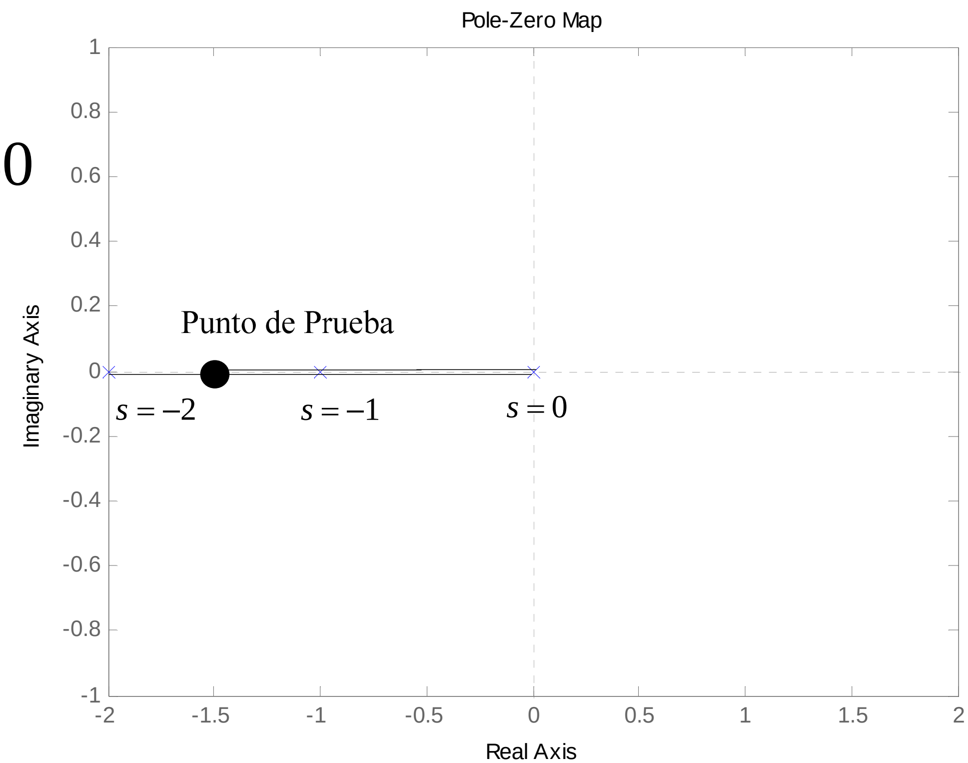
4.1. *Lugares geométricos de las raíces sobre el eje real.*

- Si se selecciona un punto de prueba entre -1 y -2, entonces:

$$\angle s = \angle(s+1) = 180$$

$$\angle(s+2) = 0$$

$$-\angle s - \angle(s+1) - \angle(s+2) = -360$$



Francisco M. Gonzalez-Longatt, fglongatt@ieee.org

4.1. *Lugares geométricos de las raíces sobre el eje real.*

$$\angle s = \angle(s+1) = 180$$
$$\angle(s+2) = 0$$

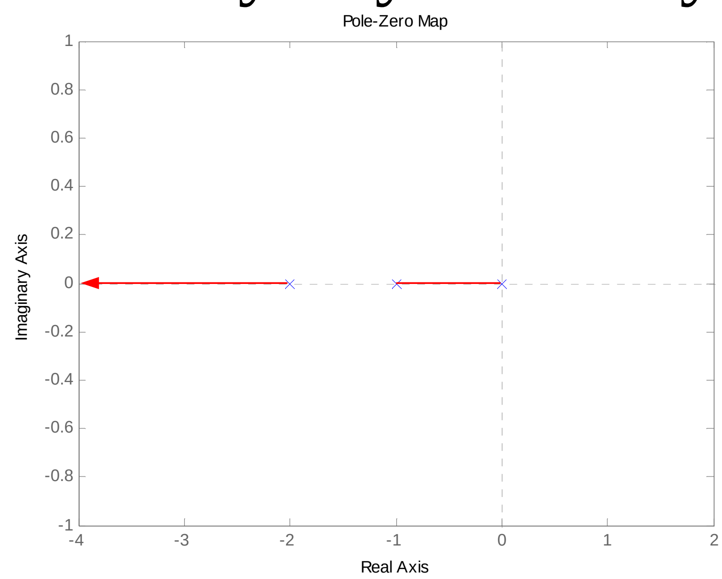
$$-\angle s - \angle(s+1) - \angle(s+2) = -360$$

- Se observa que no se satisface la condición de ángulo. Por tanto, el eje real negativo de -1 a -2 *no es parte del lugar geométrico de las raíces*.

Francisco M. Gonzalez-Longatt, fglongatt@ieee.org

4.1. *Lugares geométricos de las raíces sobre el eje real.*

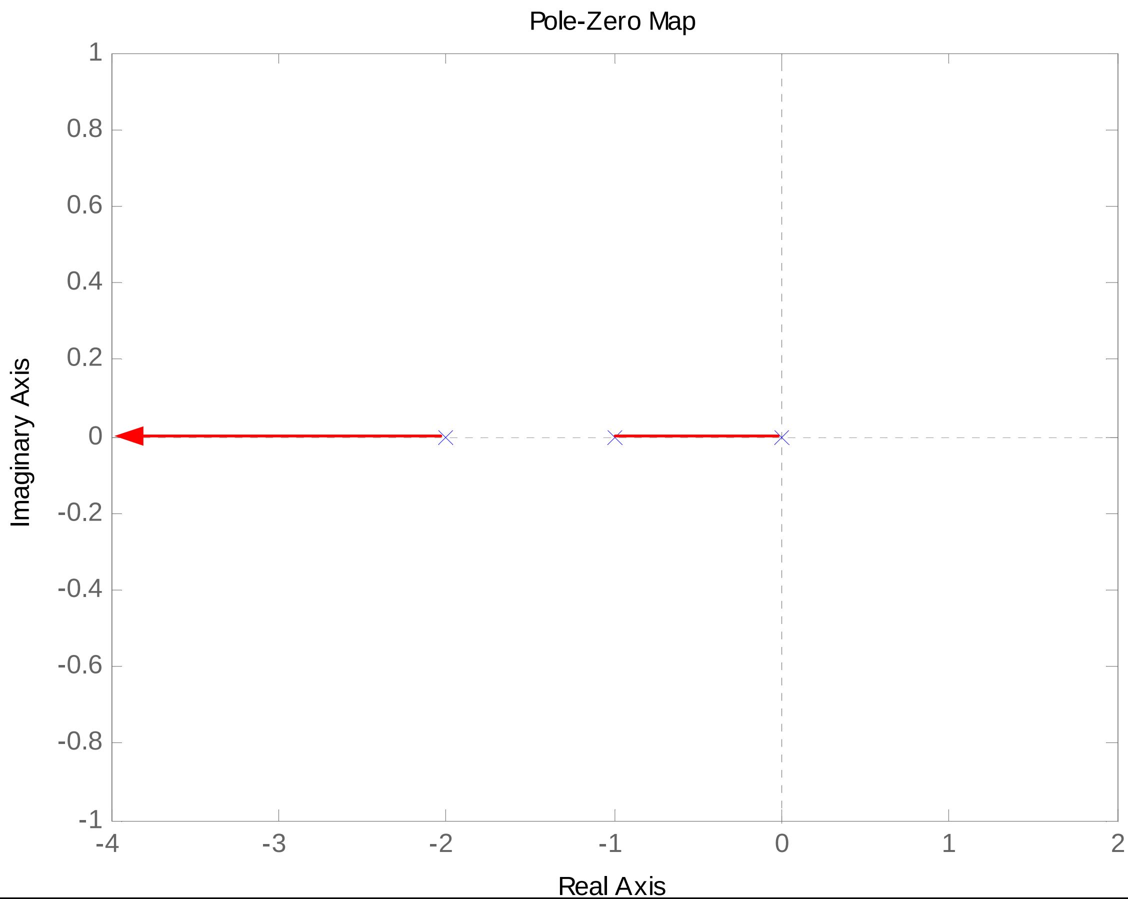
- Si se ubica un punto de prueba sobre el eje real negativo de -2 a -∞.
- Se satisface la condición de ángulo.
- Existen lugares geométricos de las raíces sobre el eje real negativo entre 0 y -1 y entre -2 y - ∞.



Francisco M. Gonzalez-Longatt, fglongatt@ieee.org

4.1. *Lugares geométricos de las raíces sobre el eje real.*

- Existen lugares geométricos de las raíces sobre el eje real negativo entre 0 y -1 y entre -2 y - ∞.



Francisco M. Gonzalez-Longatt, fglongatt@ieee.org

4.2. *Determine las asíntotas de los lugares geométricos de las raíces*.

- Las asíntotas de los lugares geométricos de las raíces, conforme *s* tiende a infinito, se determinan del modo siguiente:
- Si se selecciona un punto de prueba muy lejano al origen, entonces:

$$\lim_{s\to\infty}\left[G(s)\right]=\lim_{s\to\infty}\left[\frac{K}{s(s+1)(s+2)}\right]=\lim_{s\to\infty}\left[\frac{K}{s^3}\right]$$

Francisco M. Gonzalez-Longatt, fglongatt@ieee.org

4.2. *Determine las asíntotas de los lugares geométricos de las raíces.*

- Si se selecciona un punto de prueba muy lejano al origen, entonces:

$$\lim_{s\to\infty}[G(s)] = \lim_{s\to\infty}\left[\frac{K}{s(s+1)(s+2)}\right] = \lim_{s\to\infty}\left[\frac{K}{s^3}\right]$$

- Y la condición de ángulo se convierte es:

$$-3\angle s = \pm 180^\circ(2k+1) \qquad \text{para } k = 0, 1, 2, \ldots$$

- O bien,

$$\text{Angulo de Asintotas} = \frac{\pm 180^\circ(2k+1)}{3} \qquad \text{para } k = 0, 1, 2, \ldots$$

Francisco M. Gonzalez-Longatt, fglongatt@ieee.org

4.2. *Determine las asíntotas de los lugares geométricos de las raíces*.

- Dado que el ángulo se repite a sí mismo conforme *K* varía, los ángulos distintos para las asíntotas se *determinan como 60°, -60° y 180°*.
- Por tanto, *hay tres asíntotas*.
- La *única que tiene el ángulo de 180° es el eje real negativo*.
- Antes de dibujar estas asíntotas en el plano complejo, se debe encontrar el punto en el cual intersectan el eje real.

Francisco M. Gonzalez-Longatt, fglongatt@ieee.org

4.2. *Determine las asíntotas de los lugares geométricos de las raíces*.

- Antes de dibujar estas asíntotas en el plano complejo, se debe encontrar el punto en el cual intersectan el eje real.
- Dado que:

$$G(s) = \frac{K}{s(s+1)(s+2)}$$

- Si un punto de prueba se ubica lejos del origen, $G(s)$ se escribe como:

$$G(s) = \frac{K}{s^3 + 3s^2 + \ldots}$$

Francisco M. Gonzalez-Longatt, fglongatt@ieee.org

4.2. *Determine las asíntotas de los lugares geométricos de las raíces*.

- Dado que la ecuación característica es:

$$G(s) = -1$$

- De tal modo, que la ecuación característica puede escribirse:

$$s^3 + 3s^2 + ... = -K$$

- Para un valor grande de s, esta última ecuación se aproxima mediante:

$$(s+1)^3 = 0$$

- Si la básica de la intersección de las asuntotas y el eje real se representa mediante $s = -\sigma_a$.

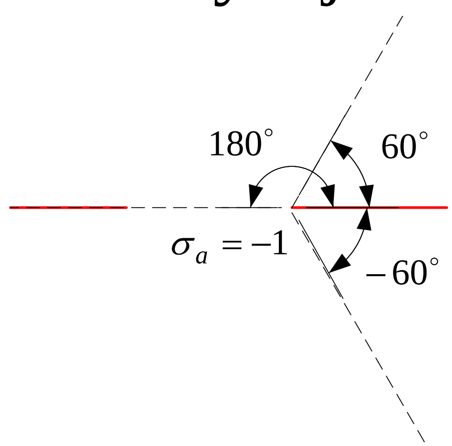
Francisco M. Gonzalez-Longatt, fglongatt@ieee.org

4.2. *Determine las asíntotas de los lugares geométricos de las raíces*.

- Si la básica de la intersección de las asuntotas y el eje real se representa mediante $s = -\sigma_a$, entonces:

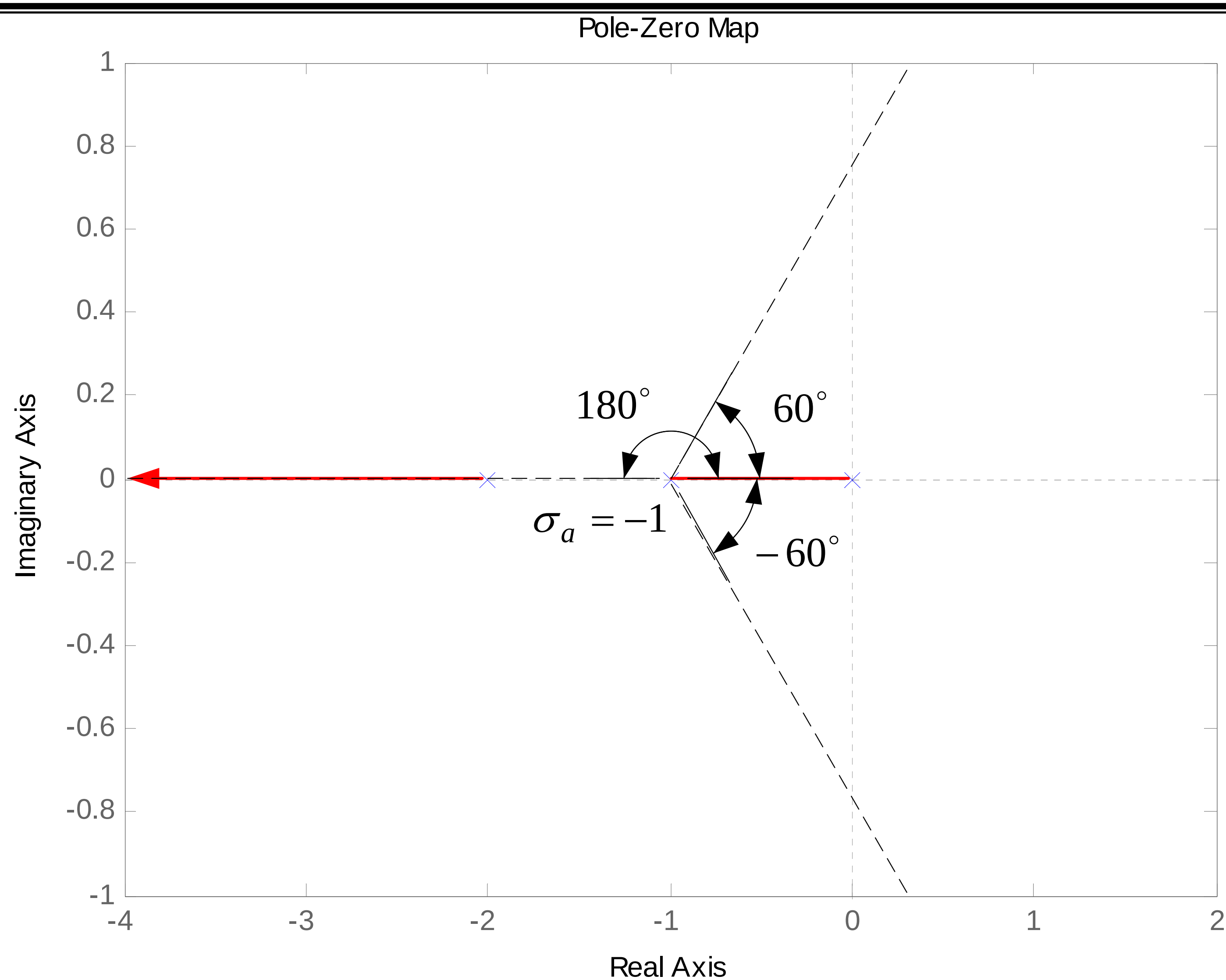
$$\sigma_a = -1$$

- Y el punto de origen de las asuntotas es (-1,0). Las asintotas son casi parte de los lugares geométricos de las raíces, en regiones muy lejanas al oriente.



Francisco M. Gonzalez-Longatt, fglongatt@ieee.org

4.2. *Determine las asíntotas de los lugares geométricos de las raíces.*



Francisco M. Gonzalez-Longatt, fglongatt@ieee.org

4.3. *Determine el punto de ruptura o desprendimiento.*

- Para trazar con precisión los lugares geométricos de las raíces, se debe encontrar *el punto de desprendimiento, a partir del cual las ramificaciones del lugar geométrico que se originan en los polos* en 0 y -1 (conforme K aumenta) se alejan del eje real y se mueven sobre plano complejo.
- *El punto de desprendimiento corresponde a un punto en el plano s en el cual ocurren raíces múltiples de la ecuación característica.*
- Existe un método sencillo para encontrar el punto de desprendimiento.

Francisco M. Gonzalez-Longatt, fglongatt@ieee.org

4.3. *Determine el punto de ruptura o desprendimiento.*

- Escribir la ecuación característica como:

$$f(s) = B(s) + KA(s) = 0$$

- En donde $A(s)$ y $B(s)$ no contienen K.
- Observe que $f(s) = 0$, tienen raíces múltiples en los puntos donde:

$$\frac{df(s)}{ds} = 0$$

Francisco M. Gonzalez-Longatt, fglongatt@ieee.org

4.3. *Determine el punto de ruptura o desprendimiento*.

- Esto se observa del modo siguiente: supóngase que $f(s)$ tiene raíces múltiples de un orden r.
- En este caso, $f(s)$ se describe como:

$$f(s) = (s - s_1)(s - s_2)\ldots(s - s_n)$$

- Si se deriva esta ecuación respecto a la variable s, y se establece $s = s_1$, se obtiene:

$$\left.\frac{df(s)}{ds}\right|_{s=s_1} = 0$$

Francisco M. Gonzalez-Longatt, fglongatt@ieee.org

4.3. *Determine el punto de ruptura o desprendimiento.*

- Esto significa que múltiples raíces de $f(s)$.

$$\frac{df(s)}{ds} = B'(s) + KA'(s) = 0$$

- en donde:

$$A'(s) = \frac{dA(s)}{ds}$$

$$B'(s) = \frac{dB(s)}{ds}$$

Francisco M. Gonzalez-Longatt, fglongatt@ieee.org

4.3. *Determine el punto de ruptura o desprendimiento.*

- El valor especifico de K que producirá raíces múltiples de la ecuación característica:

$$K = -\frac{B'(s)}{A'(s)}$$

- Se sustituye este valor de K en la ecuación, se obtiene:

$$f(s) = B(s) - \frac{B'(s)}{A'(s)} = 0 \quad \Rightarrow \quad B(s)A'(s) - B'(s)A(s) = 0$$

$$K = -\frac{B(s)}{A(s)} \quad \Rightarrow \quad \frac{dK}{ds} = -\frac{B'(s)A(s) - B(s)A'(s)}{A^2(s)}$$

4.3. *Determine el punto de ruptura o desprendimiento.*

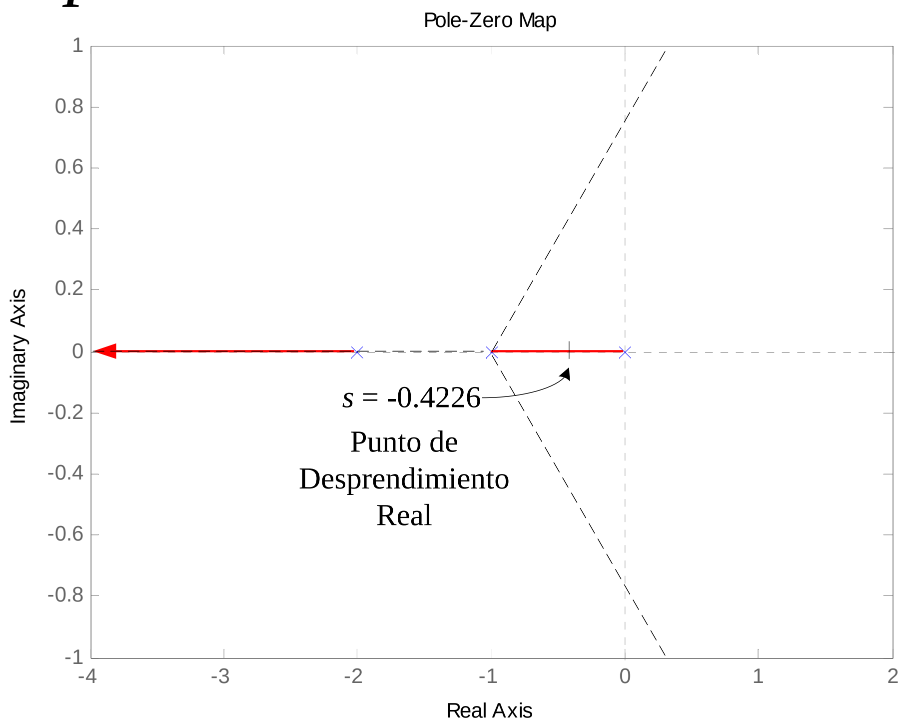
- Si dK/ds se hace igual a cero, obtenemos lo mismo que en la ecuación anterior.
- Los puntos de desprendimiento se determinan sencillamente a partir de las raíces de:

$$\frac{dK}{ds} = 0$$

Francisco M. Gonzalez-Longatt, fglongatt@ieee.org

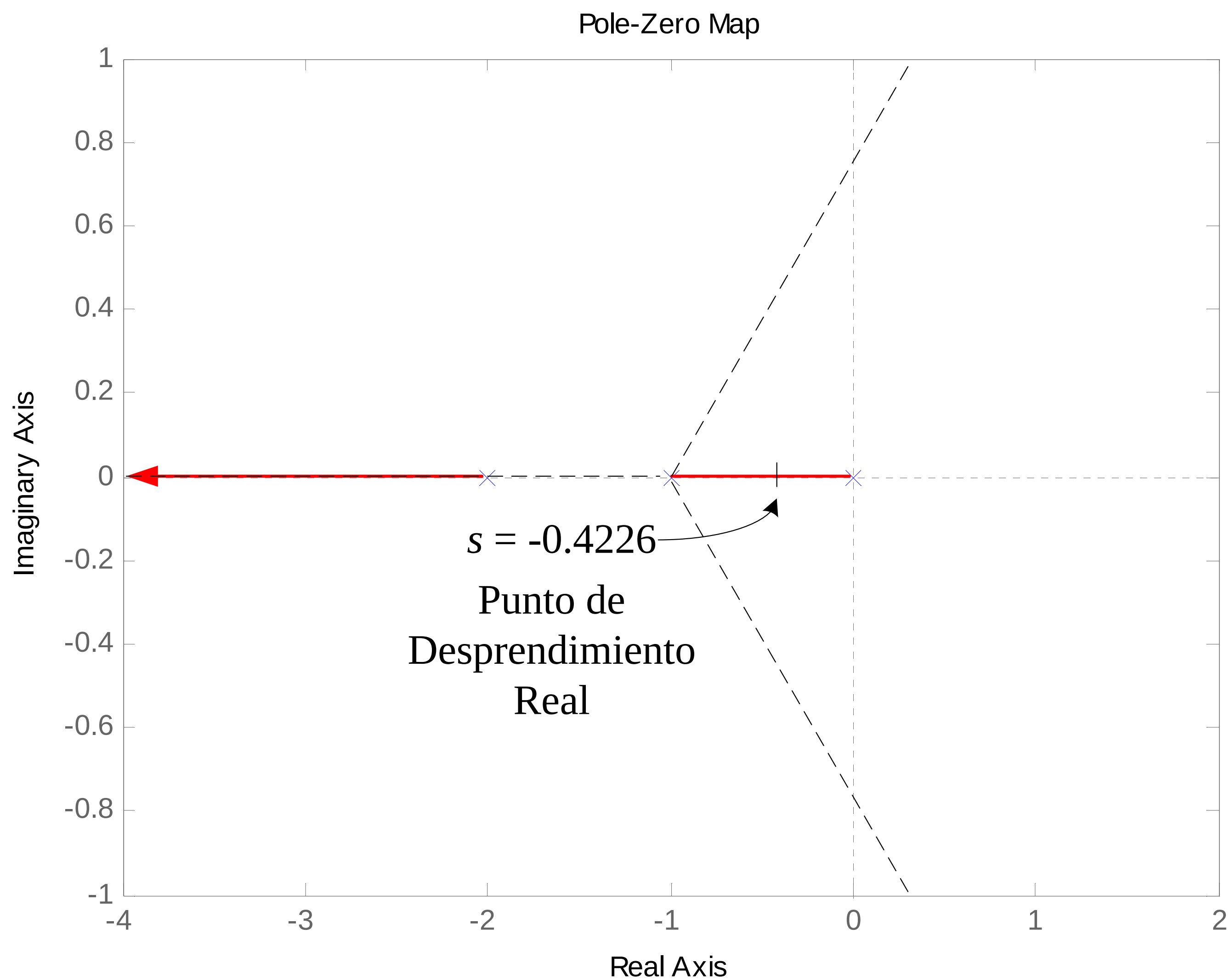
4.3. *Determine el punto de ruptura o desprendimiento.*

- Dado que el punto de desprendimiento debe encontrarse sobre el lugar geométrico de las raíces entre 0 y - 1, es evidente que s = -0.4226 corresponde al *punto de desprendimiento real*.



Francisco M. Gonzalez-Longatt, fglongatt@ieee.org

4.3. *Determine el punto de ruptura o desprendimiento.*



Francisco M. Gonzalez-Longatt, fglongatt@ieee.org

4.3. *Determine el punto de ruptura o desprendimiento*.

- El punto s = -1.5774 no está sobre el lugar geométrico de las raíces.
- *No es un punto de desprendimiento* o de ingreso real.
- El cálculo de los valores de K que corresponden a s = -0.4226 y s = 1.5774 da por resultado:

$$K = 0.3849, \ \text{para } s = -0.4226$$

$$K = -0.3849, \text{para } s = -1.5774$$

Francisco M. Gonzalez-Longatt, fglongatt@ieee.org

4.4. *Determine los puntos en donde los lugares geométricos de las raíces cruzan el eje imaginario.*

- Estos puntos se encuentran mediante el *criterio de estabilidad de Routh*, del modo siguiente:

  – Dado que la ecuación característica para el sistema actual es:

$$s^3 + 3s^2 + 2s + K = 0$$

  – El arreglo de Routh se convierte en:

$$\begin{array}{lcc} s^3 & 1 & 2 \\ s^2 & 3 & K \\ s^1 & \dfrac{6-K}{3} & \\ s^0 & K & \end{array}$$

4.4. *Determine los puntos en donde los lugares geométricos de las raíces cruzan el eje imaginario.*

- El valor de K que iguala con cero el término s' de la primera columna es $K = 6$.
- Los puntos de cruce con el eje imaginario se encuentran después despejando la ecuación auxiliar obtenida del renglón s^2; es decir,

$$s^3 + 3s^2 + 2s + K = 0$$

- Lo cual produce,

$$s = \pm j\sqrt{2}$$

Francisco M. Gonzalez-Longatt, fglongatt@ieee.org

4.4. *Determine los puntos en donde los lugares geométricos de las raíces cruzan el eje imaginario.*

- Las frecuencias en los puntos de cruce con el eje imaginario son, por tanto, $\omega = \sqrt{2}$.
- El valor de ganancia que corresponde a los puntos de cruce es $K = 6$.
- Un enfoque alternativo es suponer que $s = j\omega$ en la ecuación característica, igualar con cero tanto la parte imaginaria como la parte como la real y después despejar ω y K.

Francisco M. Gonzalez-Longatt, fglongatt@ieee.org

4.4. *Determine los puntos en donde los lugares geométricos de las raíces cruzan el eje imaginario.*

- Para el sistema actual, la ecuación característica, con $s = j\omega$, es:

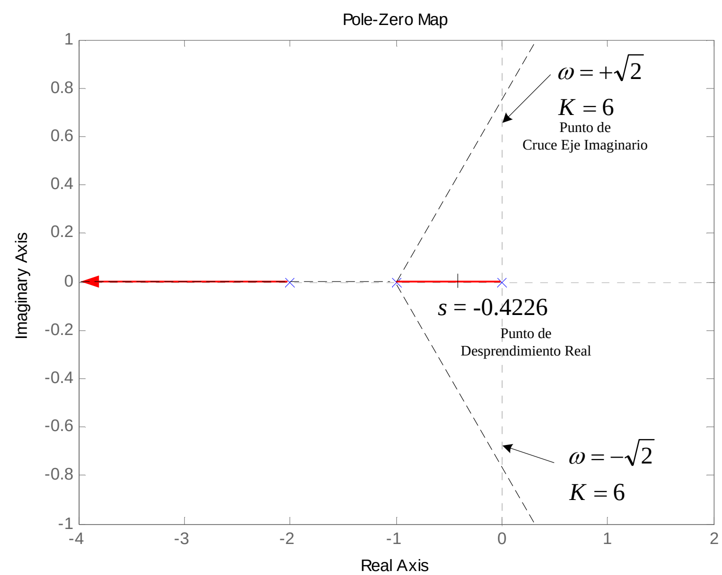
$$(j\omega)^3 + 3(j\omega)^2 + j\left(2\omega - \omega^3\right) = 0$$

$$K - 3\omega^2 = 0 \qquad\qquad 2\omega - \omega^3 = 0$$

$$\begin{cases} \omega = \pm\sqrt{2} \\ K = 6 \end{cases} \qquad\qquad \begin{cases} \omega = 0 \\ K = 0 \end{cases}$$

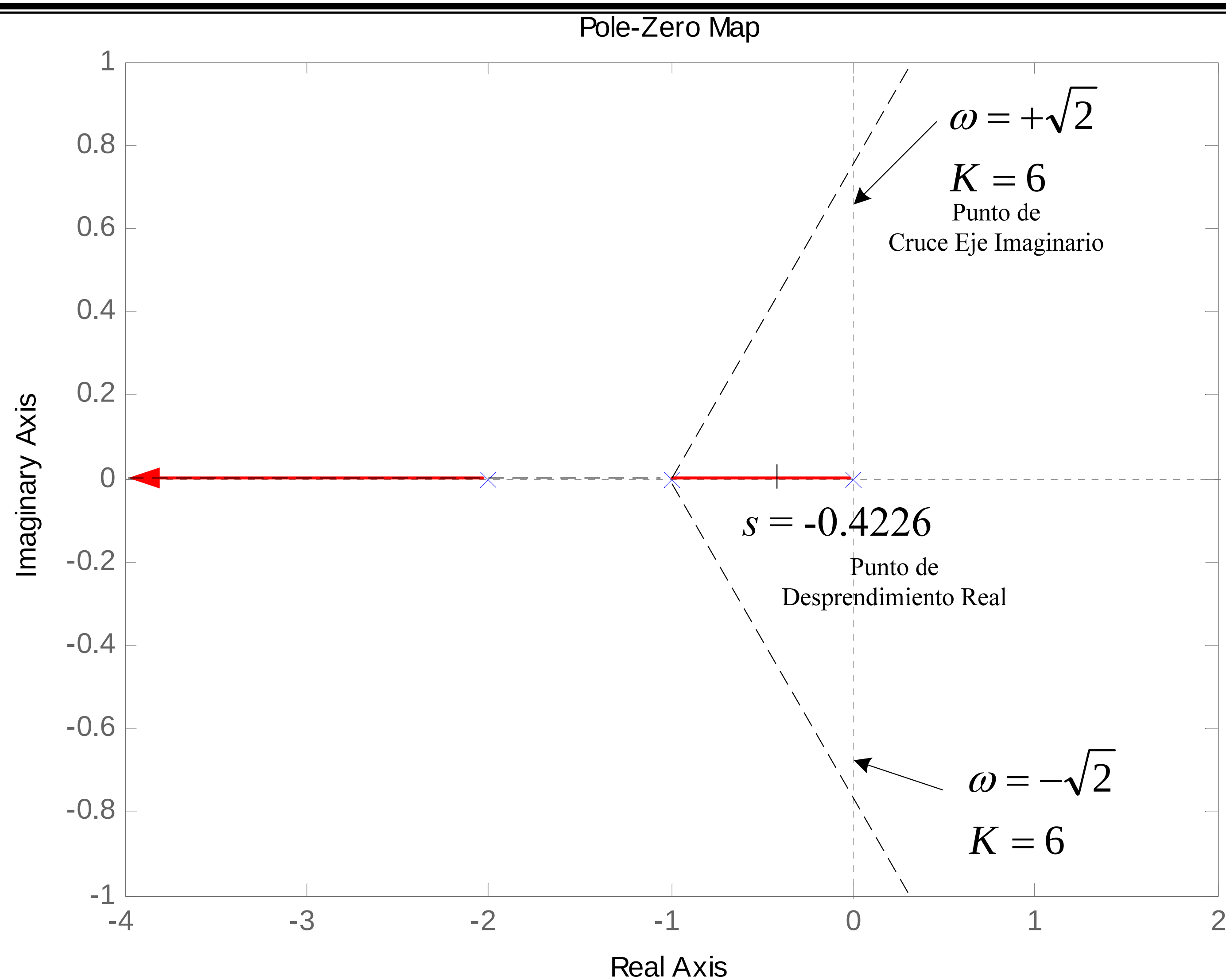
4.4. *Determine los puntos en donde los lugares geométricos de las raíces cruzan el eje imaginario.*

- Los lugares geométricos de las raíces cruzan el eje imaginario en $\omega = \pm\sqrt{2}$, y el valor de K en los puntos de cruce es 6.
- Asimismo, una ramificación del lugar geométrico de las raíces sobre el eje real tocará el eje imaginario en $\omega = 0$.



Francisco M. Gonzalez-Longatt, fglongatt@ieee.org

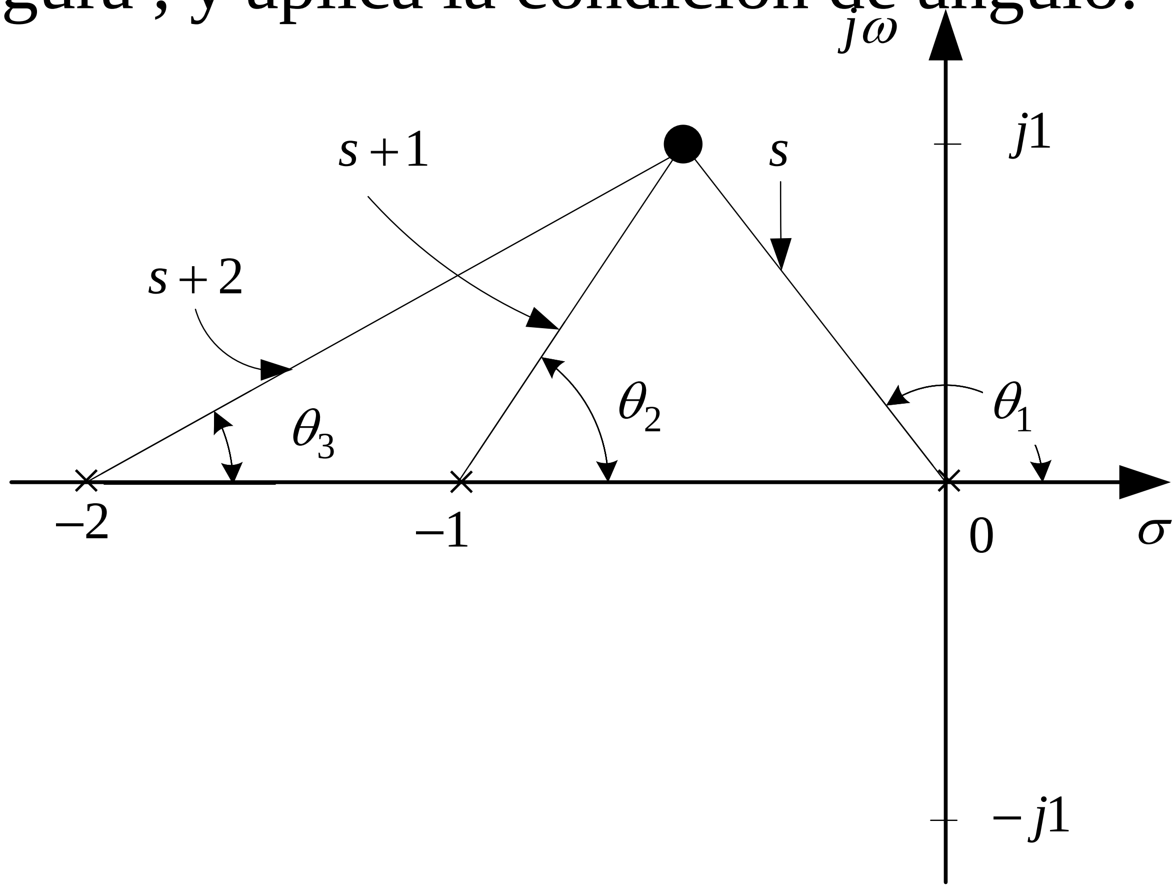
4.4. *Determine los puntos en donde los lugares geométricos de las raíces cruzan el eje imaginario.*



Francisco M. Gonzalez-Longatt, fglongatt@ieee.org

4.5. *Seleccione un punto de prueba en una vecindad amplia del eje $s = j\omega$ y el origen*

- Se selecciona un punto de pruba como se muestra en la Figura , y aplica la condición de ángulo.



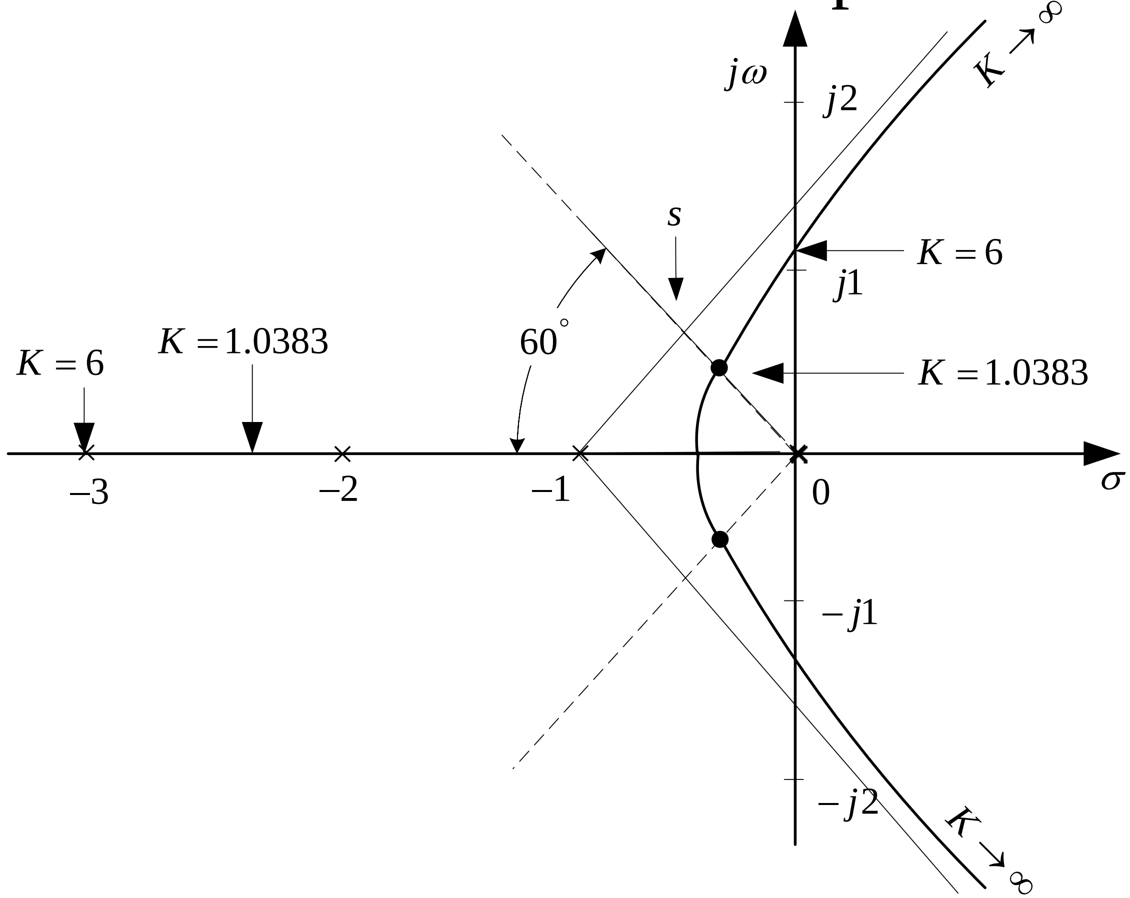
4.5. *Seleccione un punto de prueba en una vecindad amplia del eje $s = j\omega$ y el origen*

- Si un punto de prueba está sobre los lugares geométricos de las raíces, la suma de los tres ángulos, $\theta_1 + \theta_2 + \theta_3$ debe ser 180°.
- Si el punto de prueba no satisface la condición de ángulo, seleccione otro hasta que se cumpla tal condición.
- La suma de los ángulos en el punto de prueba indicará en qué dirección debe moverse el punto de prueba.
- Continúe este proceso y ubique una cantidad suficiente de puntos que satisfagan la condición de ángulo.

Francisco M. Gonzalez-Longatt, fglongatt@ieee.org

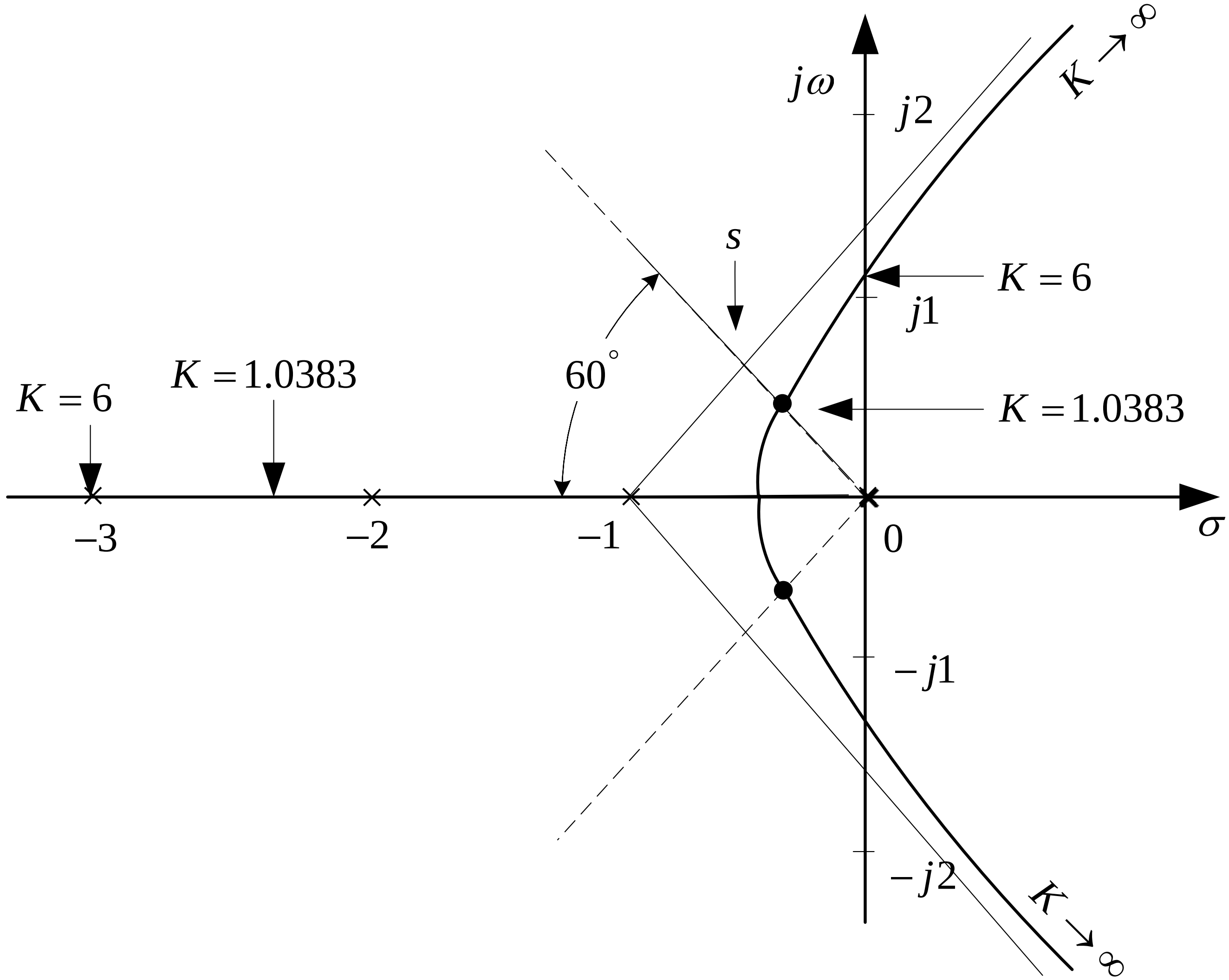
4.6. *Dibuje los LGR, con la información obtenida en los pasos anteriores*

- Dibuje los lugares geométricos de las raíces, con base en la información obtenida en los pasos anteriores:



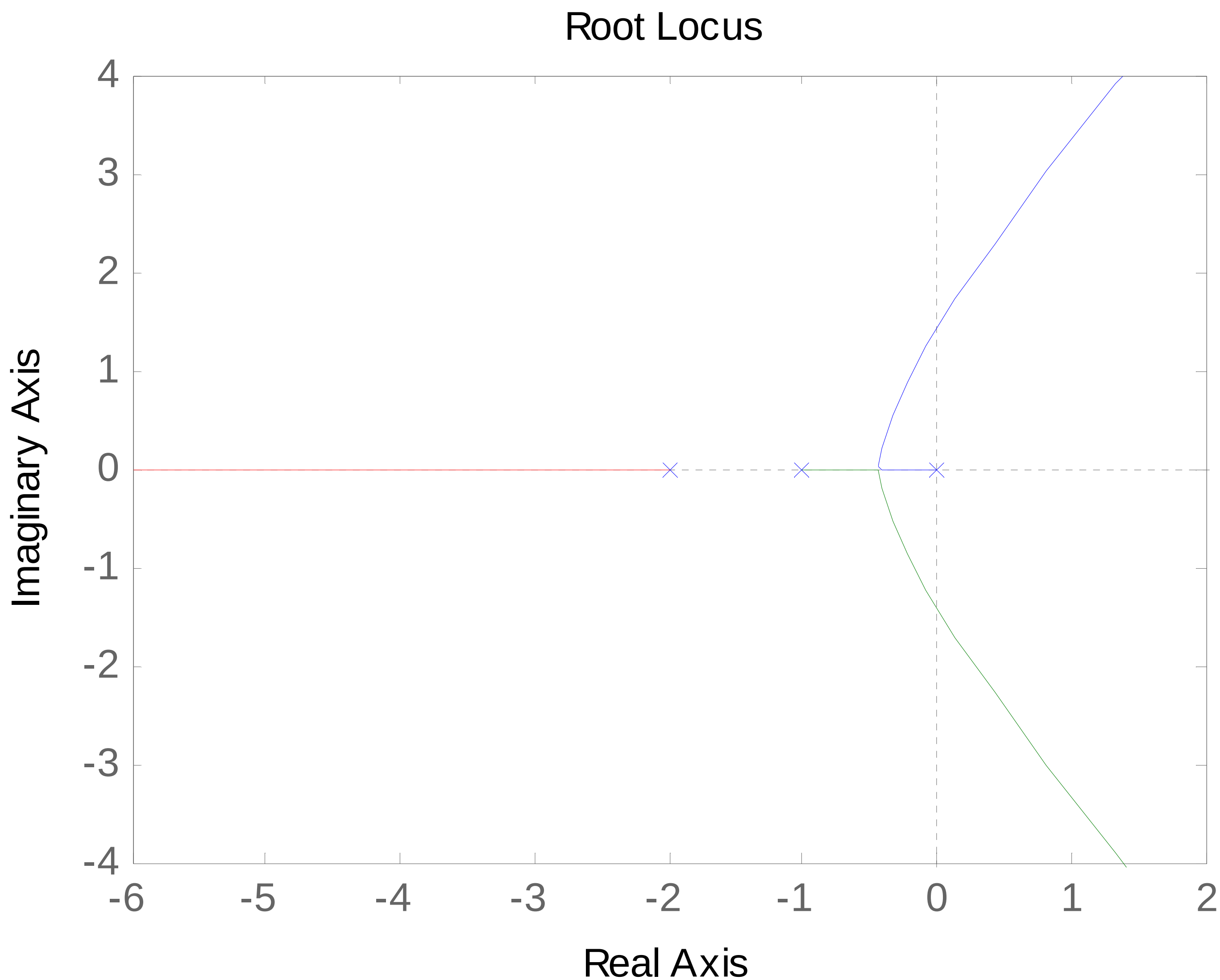
Francisco M. Gonzalez-Longatt, fglongatt@ieee.org

4.6. *Dibuje los LGR, con la información obtenida en los pasos anteriores*



Francisco M. Gonzalez-Longatt, fglongatt@ieee.org

4.6. *Dibuje los LGR, con la información obtenida en los pasos anteriores*



Francisco M. Gonzalez-Longatt, fglongatt@ieee.org

4.6. *Dibuje los LGR, con la información obtenida en los pasos anteriores*

- Aplicando Matlab

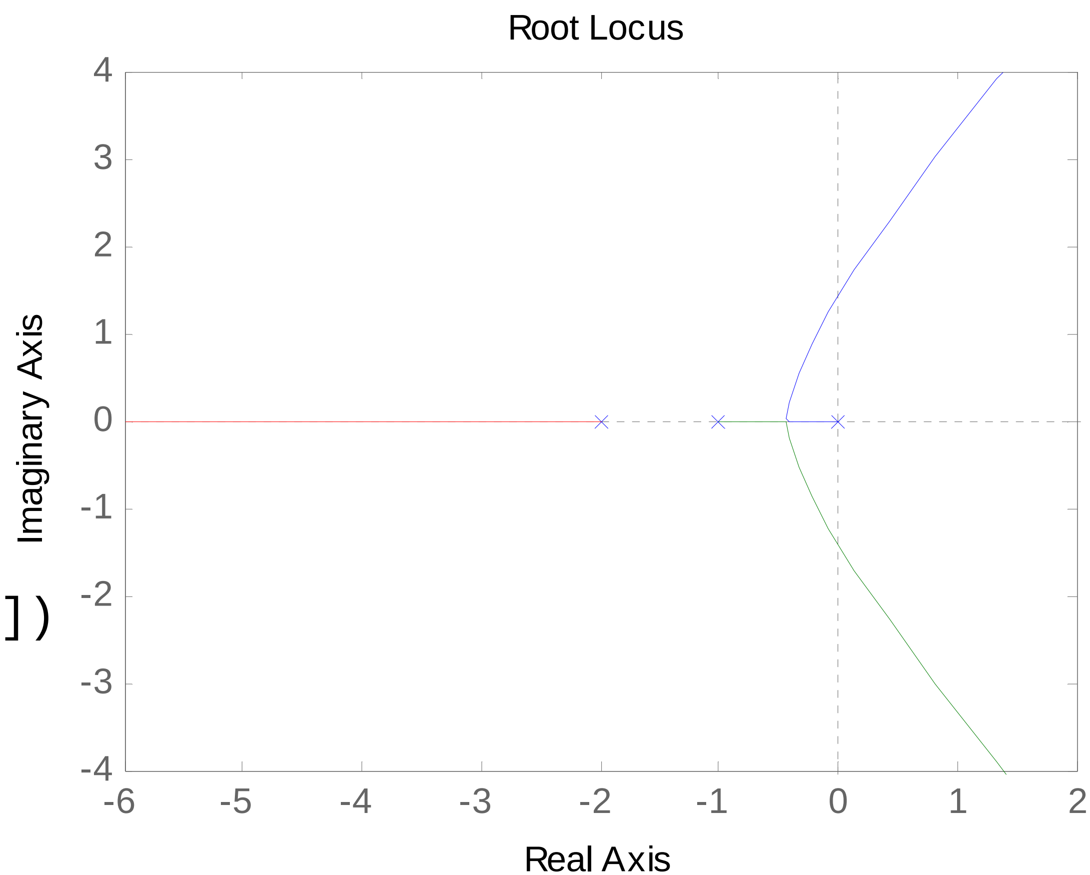
```
>> syms s
>> den=s*(s+1)*(s+2)
 den =

s*(s+1)*(s+2)

 >> expand(den)
 ans =
s^3+3*s^2+2*s

>> GH=tf([1],[1 3 2 0])

Transfer function:
        1
-----------------
s^3 + 3 s^2 + 2 s
>> rlocus(GH)
```



4. Resolución

- *Determine un par de polos dominantes complejos conjugados en lazo cerrado tales que el factor de amortiguamiento relativo ξ sea 0.5.*
- Los polos en lazo cerrado con $\xi = 0.5$ se encuentran sobre las líneas que pasan por el origen y forman los ángulos ±cos-1ξ, = ±cos-10.5 = ±60° con el eje real negativo.

Francisco M. Gonzalez-Longatt, fglongatt@ieee.org

4. Resolución

- A partir de la Figura, tales polos en lazo cerrado con ξ = 0.5 se obtienen del modo siguiente:

  s_1 = -0.3337 + j0.5780, s_2 = -0.3337 – j0.5780

- El valor de K que producen tales polos se encuentra a partir de la condición de magnitud, del modo siguiente:

$$K = \left| s(s+1)(s+2) \right|_{s=-0.337+j0.5750}$$

- Usando este valor de K, el tercer polo se encuentra en s = -2.3326

Francisco M. Gonzalez-Longatt, fglongatt@ieee.org

4. Resolución

- Observe que, a partir del paso 4, se aprecia que para K = 6, los polos dominantes en lazo cerrado se encuentran sobre el eje imaginario en .
- Con este valor de K, el sistema *exhibirá oscilaciones sostenidas*.
- Para K > 6, los polos dominantes en lazo cerrado se encuentran en el semiplano derecho del plano *s*, produciendo un *sistema inestable*.

Francisco M. Gonzalez-Longatt, fglongatt@ieee.org

4. Resolución

- Obsérvese que, si es necesario, se establece con facilidad la graduación de los lugares geométricos de las raíces en términos de K mediante la condición de magnitud.
- Sencillamente se selecciona un punto sobre un lugar geométrico de las raíces, se miden las magnitudes de las tres cantidades complejas s, $s + 1$ y $s + 2$ y se multiplica estas magnitudes; el producto es igual al valor de la ganancia K en tal punto, o bien.

Francisco M. Gonzalez-Longatt, fglongatt@ieee.org