ELC-33103

Teoría de Control

# Introducción a la Representación en Variable de Estado

Prof. Francisco M. Gonzalez-Longatt

fglongatt@ieee.org

http://www.giaelec.org/fglongatt/SP.htm

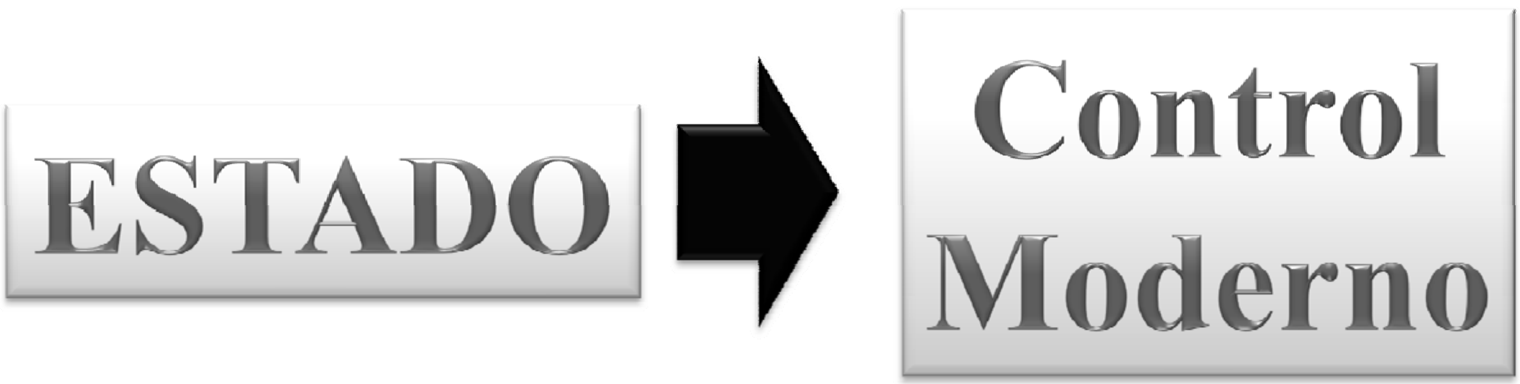
# 1. Teoría de Control Moderna

- La *tendencia moderna en los sistemas de ingeniería* es hacia una *mayor complejidad*, debido principalmente a los requerimientos de las tareas complejas y la elevada precisión.
- Los sistemas complejos *pueden tener entradas y salidas múltiples y pueden variar en el tiempo*.
- Desde 1960 se ha desarrollado la *teoría de control moderna*, que es un nuevo enfoque del *análisis y diseño* de sistemas de control complejos.


Dr. Francisco M. Gonzalez-Longatt, fglongatt@ieee.org

# 1. Teoría de Control Moderna

- Este enfoque nuevo se basa en el *concepto de estado*.
- El concepto por sí mismo no es nuevo.
- Ha existido durante largo tiempo en el campo de la dinámica clásica y en otros medios.





Dr. Francisco M. Gonzalez-Longatt, fglongatt@ieee.org

# 2. Teoría Convencional vs. Moderna

- La *teoría de control moderna se aplica a sistemas con entradas y salidas múltiples, que pueden ser lineales o no lineales*.
- La teoría moderna es esencialmente un *enfoque en el dominio del tiempo*.

**TIEMPO**


**MULTIVARIADO**

**LINEAL O NO**


Dr. Francisco M. Gonzalez-Longatt, fglongatt@ieee.org

# 2. Teoría Convencional vs. Moderna

- La *teoría convencional sólo se aplica a sistemas lineales con una entrada y una salida e invariantes con el tiempo*.
- La teoría de control convencional es un enfoque *complejo en el dominio de la frecuencia*.


**FRECUENCIA**


Dr. Francisco M. Gonzalez-Longatt, fglongatt@ieee.org

# 3. Estado

- El *estado de un sistema dinámico* es el conjunto más pequeño de variables (denominadas variables de estado) de modo que el conocimiento de estas variables en $t \geq t_0$, junto con el conocimiento de la entrada para $t = t_0$, determina por completo el comportamiento del sistema para cualquier tiempo $t \geq t_0$.
- El concepto de estado de *ningún modo está limitado a los sistemas físicos*.


Dr. Francisco M. Gonzalez-Longatt, fglongatt@ieee.org

# 4. Variable de Estado

- Las variables de estado de un sistema dinámico son las que forman *el conjunto más pequeño de variables que determinan el estado del sistema dinámico*.
- Si se necesitan al menos $n$ variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$, para describir por completo el comportamiento de un sistema dinámico (por lo cual una vez que se proporciona la entrada para $t \geq t_0$ y se especifica el estado inicial en $t = t_0$, el estado futuro del sistema se determina por completo), tales $n$ variables son un *conjunto de variables de estado*.


Dr. Francisco M. Gonzalez-Longatt, fglongatt@ieee.org

# 4. Variable de Estado

- Las variables de estado *no necesitan ser cantidades medibles u observables físicamente*.
- Las variables que no representan cantidades físicas y aquellas que no son medibles ni observables pueden seleccionarse como variables de estado.
- La libertad al elegir las variables de estado es una ventaja de los *métodos de espacio de estados*.


Dr. Francisco M. Gonzalez-Longatt, fglongatt@ieee.org

# 4. Variable de Estado

- En la práctica es conveniente elegir cantidades que se midan con facilidad para las variables de estado, si es posible, debido a que las *leyes del control óptimo requerirán la realimentación de todas las variables de estado con una ponderación conveniente*.


Dr. Francisco M. Gonzalez-Longatt, fglongatt@ieee.org

# 5. Vector de Estado

- Si se necesitan $n$ variables de estado para describir por completo el comportamiento de un sistema determinado, estas $n$ variables de estado se consideran los $n$ componentes de un vector $\mathbf{x}$.
- Este vector se denomina ***vector de estado.***
- El vector de estado determina de manera única el estado del sistema $\mathbf{x}(t)$ para cualquier tiempo $t \geq t_0$, una vez que se obtiene el estado en $t \geq= t_0$ y se especifica la entrada $\mathbf{u}(t)$ para $t \geq t_0$.


Dr. Francisco M. Gonzalez-Longatt, fglongatt@ieee.org

# 6. Espacio de Estados

- El espacio de $n$ dimensiones cuyos ejes de coordenadas están formados por el eje $\mathbf{x}_1$, el eje $\mathbf{x}_2$, ... , el eje $\mathbf{x}_n$, se denomina ***espacio de estados.***
- Cualquier estado puede representarse mediante un punto en el espacio de estados.


Dr. Francisco M. Gonzalez-Longatt, fglongatt@ieee.org

# 7. Ecuaciones de Estado

- En el análisis en el espacio de estados, hay *tres tipos de variables involucrados* en el modelado de sistemas dinámicos:
  - Variables de entrada,
  - Variables de salida y
  - Variables de estado.
- *No es única la representación de estado* para un sistema determinado, excepto en que la cantidad de variables de estado es igual para cualquiera de las diferentes representaciones en el espacio de estados del mismo sistema.


Dr. Francisco M. Gonzalez-Longatt, fglongatt@ieee.org

# 7. Ecuaciones de Estado

- Suponga que un sistema de entradas y salidas múltiples contiene $n$ integradores.
- También suponga que existen $r$ entradas $u_1$, $u_2(t)$,$u_r(t)$ y $m$ salidas $y_1(t)$, $y_2(t)$, . . . , $y_m(t)$.
- Definan salidas de los integradores como variables de estado: $x_1(\mathrm{t})$, $x_2(t)$, , . . ,$x_n(t)$.


Dr. Francisco M. Gonzalez-Longatt, fglongatt@ieee.org

# 7. Ecuaciones de Estado

- A continuación el sistema se describe mediante:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = f_1(x_1, x_2, \ldots x_n, u_1, u_2, \ldots u_r, t) \\ \dot{x}_2(t) = f_2(x_1, x_2, \ldots x_n, u_1, u_2, \ldots u_r, t) \\ \\ \dot{x}_n(t) = f_n(x_1, x_2, \ldots x_n, u_1, u_2, \ldots u_r, t) \end{cases}$$


Dr. Francisco M. Gonzalez-Longatt, fglongatt@ieee.org

# 7. Ecuaciones de Estado

- Las salidas del sistema, $y_1$, $y_2$, …, $y_m(t)$ mediante:

$$\begin{cases} y_1(t) = g_1(x_1, x_2, \ldots x_n, u_1, u_2, \ldots u_r, t) \\ y_2(t) = g_2(x_1, x_2, \ldots x_n, u_1, u_2, \ldots u_r, t) \\ \\ y_m(t) = g_m(x_1, x_2, \ldots x_n, u_1, u_2, \ldots u_r, t) \end{cases}$$


Dr. Francisco M. Gonzalez-Longatt, fglongatt@ieee.org

# 7. Ecuaciones de Estado

- Se definen:

$$\mathbf{x}(t)=\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \\ x_n(t) \end{bmatrix} \quad \mathbf{f}(\mathbf{x},\mathbf{u},t)\begin{bmatrix} f_1(x_1, x_2, \ldots x_n, u_1, u_2, \ldots u_r, t) \\ f_2(x_1, x_2, \ldots x_n, u_1, u_2, \ldots u_r, t) \\ \\ f_n(x_1, x_2, \ldots x_n, u_1, u_2, \ldots u_r, t) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{y}(t)=\begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \\ y_m(t) \end{bmatrix} \quad \mathbf{g}(\mathbf{x},\mathbf{u},t)\begin{bmatrix} g_1(x_1, x_2, \ldots x_n, u_1, u_2, \ldots u_r, t) \\ g_2(x_1, x_2, \ldots x_n, u_1, u_2, \ldots u_r, t) \\ \\ g_n(x_1, x_2, \ldots x_n, u_1, u_2, \ldots u_r, t) \end{bmatrix} \quad \mathbf{u}(t)=\begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ \\ u_r(t) \end{bmatrix}$$


Dr. Francisco M. Gonzalez-Longatt, fglongatt@ieee.org

# 7. Ecuaciones de Estado

- De tal modo que las ecuaciones anteriores pueden ser expresadas en una forma mas compacta por medio de:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t)$$
$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t)$$

- La primera es la *ecuación de estado* y la seguda es la *ecuación de la salida*.
- Si las funciones vectoriales **f** y/o **g** involucran explícitamente el tiempo *t*, el sistema se denomina sistema variante con el tiempo.


Dr. Francisco M. Gonzalez-Longatt, fglongatt@ieee.org

# 7. Ecuaciones de Estado

- Si se linealizan las ecuaciones alrededor del estado de operación, se tienen las siguientes ecuaciones de estado y de salida linealizadas:

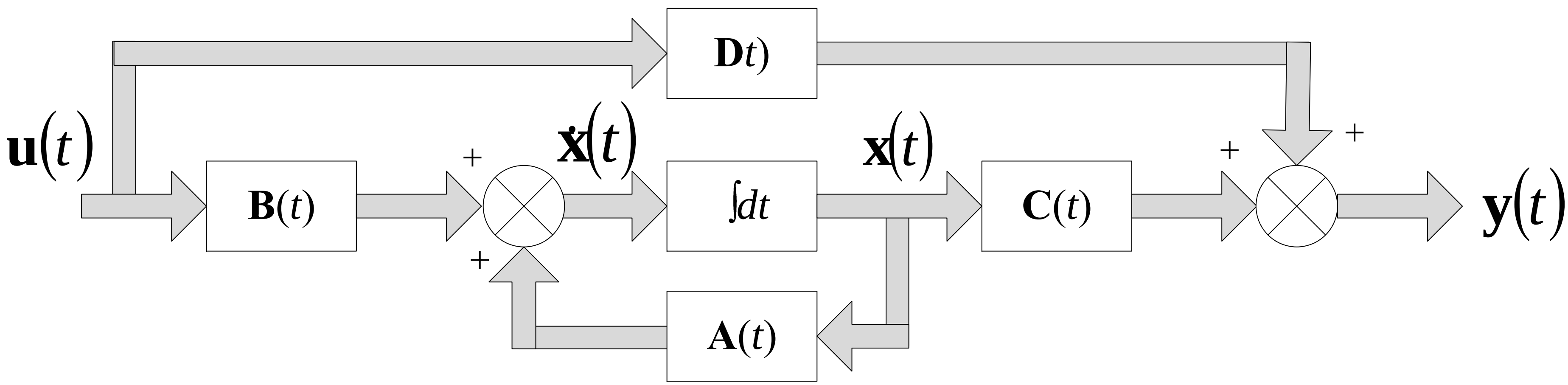
$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}(t)\mathbf{u}(t)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}(t)\mathbf{u}(t)$$

- en donde:
- $\mathbf{A}(t)$ se denomina *matriz de estado*
- $\mathbf{B}(t)$ *matriz de entrada*
- $\mathbf{C}(t)$ matriz de salida
- $\mathbf{D}(t)$ *matriz de transmisión directa*.

# 7. Ecuaciones de Estado

$$
\begin{cases}
\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}(t)\mathbf{u}(t) \\
\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}(t)\mathbf{u}(t)
\end{cases}
$$






Dr. Francisco M. Gonzalez-Longatt, fglongatt@ieee.org

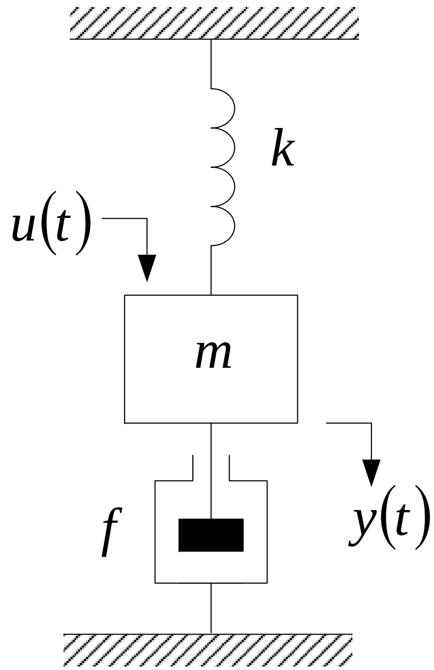
# 7. Ecuaciones de Estado

- Si las funciones vectoriales **f** y **g** no involucran el tiempo $t$ explícitamente, el sistema se denomina *sistema invariante con el tiempo*.

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t) \end{cases}$$

# 8. Ejemplo

- Considere el sistema mecánico de traslación.

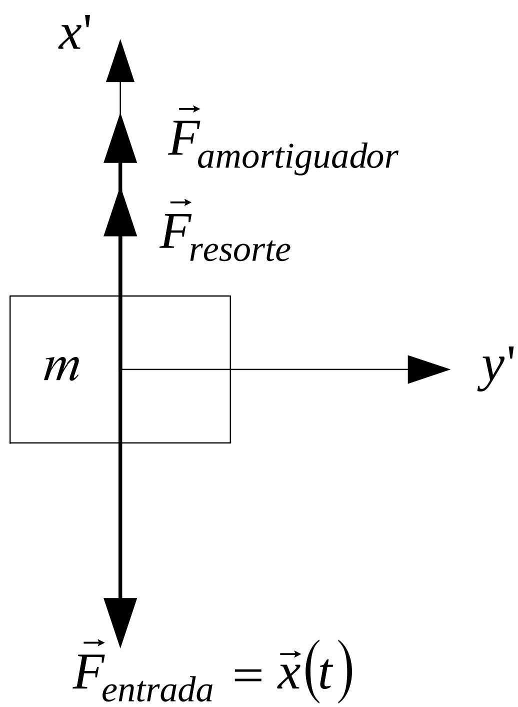



- Supone que el *sistema es lineal*.
- La fuerza externa $u(t)$ es la entrada para el sistema, y el desplazamiento $y(t)$ de la masa es la salida.


Dr. Francisco M. Gonzalez-Longatt, fglongatt@ieee.org

# 8. Ejemplo

- El desplazamiento *y(t)* se mide a partir de la posición de equilibrio en ausencia de una fuerza externa.
- Este sistema tiene una sola entrada y una sola salida.




$$m\ddot{y} = -F_{resorte} - F_{amortig} + u$$



Dr. Francisco M. Gonzalez-Longatt, fglongatt@ieee.org

# 8. Ejemplo

$$m\ddot{y} + b\dot{y} + ky = u$$

- Este sistema es de segundo orden, lo cual significa que el sistema contiene dos integradores.
- Se definen las variables de estado $x_1(t)$ y $x_2(t)$ como

$$x_1(t) = y(t)$$
$$x_2(t) = \dot{y}(t)$$


Dr. Francisco M. Gonzalez-Longatt, fglongatt@ieee.org

# 8. Ejemplo

- De tal modo, que se logra:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = \dfrac{1}{m}\left(-ky - b\dot{y}\right) + \dfrac{1}{m}u \end{cases}$$

- O,

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -\dfrac{k}{m}x_1 - \dfrac{b}{m}x_2 + \dfrac{1}{m}u \end{cases}$$


Dr. Francisco M. Gonzalez-Longatt, fglongatt@ieee.org

# 8. Ejemplo

- La ecuación de salida resulta ser:

$$Y = x_1$$

- En forma matricial:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\dfrac{k}{m} & -\dfrac{b}{m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \dfrac{1}{m} \end{bmatrix} u$$

$$Y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

# 8. Ejemplo

- Observando la representación estándar de las ecuaciones de estado resulta:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t)$$

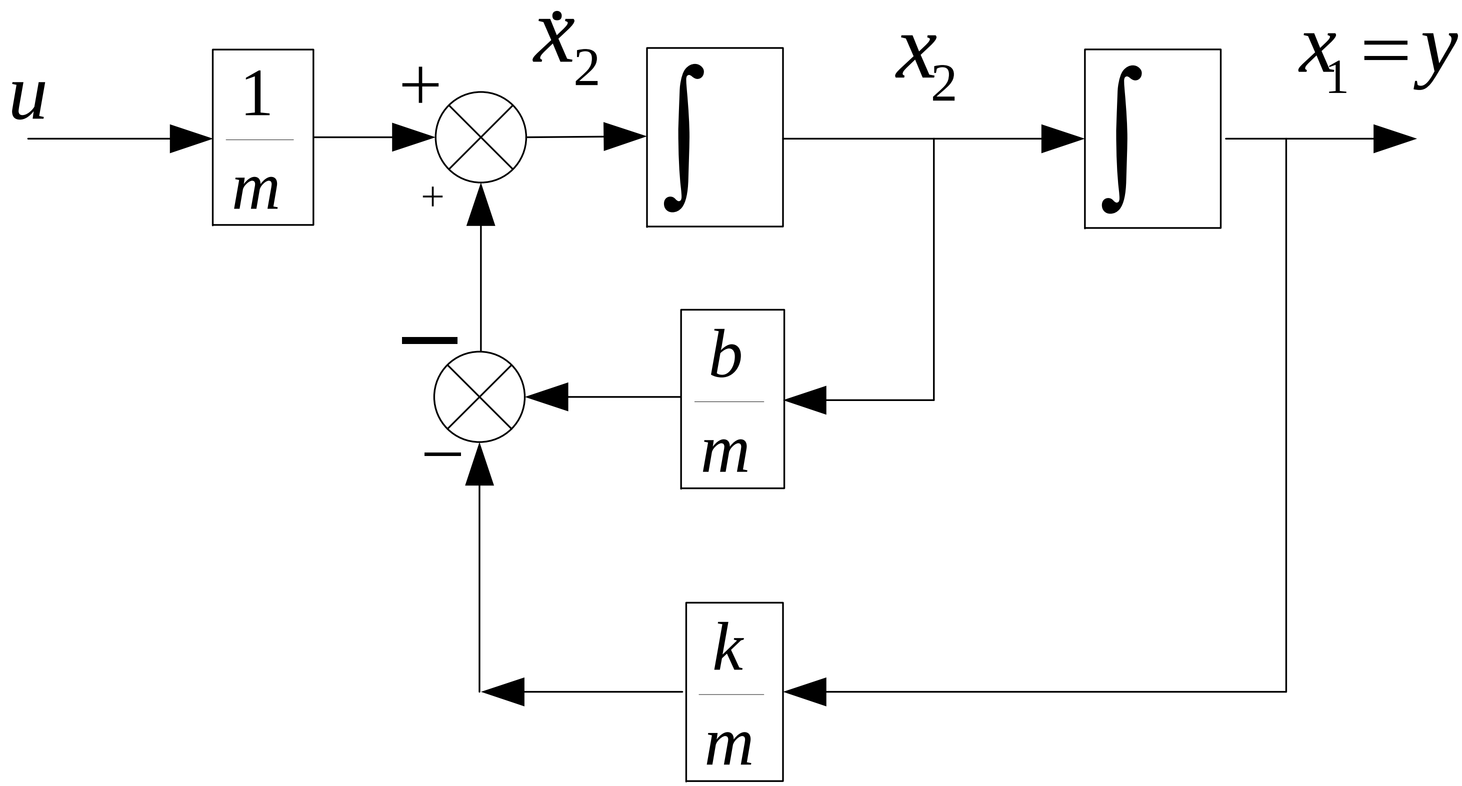
- Donde:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\dfrac{k}{m} & -\dfrac{b}{m} \end{bmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ \dfrac{1}{m} \end{bmatrix} \qquad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{D} = \mathbf{0}$$


Dr. Francisco M. Gonzalez-Longatt, fglongatt@ieee.org

# 8. Ejemplo

- La representación en diagramas de bloque del sistema mecánico.

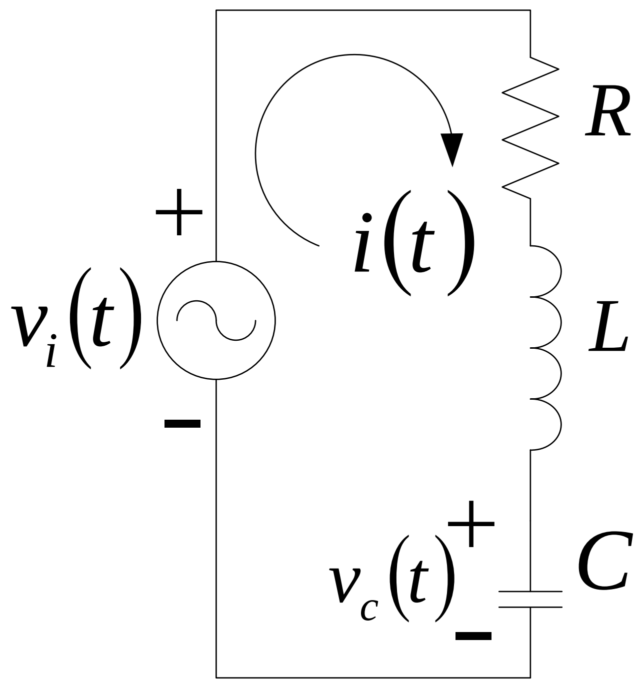





Dr. Francisco M. Gonzalez-Longatt, fglongatt@ieee.org

# 9. Ejemplo

- Considere el sistema *RLC* serie:




- Se establecen las ecuaciones que definen el comportamiento del sistema.


Dr. Francisco M. Gonzalez-Longatt, fglongatt@ieee.org

# 9. Ejemplo

- La ecuación de la malla resulta ser:

$$v_i(t) = L\frac{di(t)}{dt} + Ri(t) + v_c(t)$$

- La diferencia de potencial en el capacitor esta relacionado con la corriente por:

$$i(t) = C\frac{dv_c(t)}{dt}$$


Dr. Francisco M. Gonzalez-Longatt, fglongatt@ieee.org

# 9. Ejemplo

- Se reagrupan las ecuaciones pata despejar las respectivas derivadas;

$$\begin{cases} v_i(t) = L\dfrac{di(t)}{dt} + Ri(t) + v_c(t) \\ i(t) = C\dfrac{dv_c(t)}{dt} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{di(t)}{dt} = -\dfrac{R}{L}i(t) - \dfrac{R}{L}v_c(t) + \dfrac{1}{L}v_c(t) \\ \dfrac{dv_c(t)}{dt} = \dfrac{1}{C}i(t) \end{cases}$$


Dr. Francisco M. Gonzalez-Longatt, fglongatt@ieee.org

# 9. Ejemplo

- Expresando las relaciones combinadas en notación matricial resulta:

$$\begin{cases} \dfrac{di(t)}{dt} = -\dfrac{R}{L}i(t) - \dfrac{R}{L}v_c(t) + \dfrac{1}{L}v_i(t) \\ \dfrac{dv_c(t)}{dt} = \dfrac{1}{C}i(t) \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{i} \\ \dot{v}_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dfrac{R}{L} & -\dfrac{R}{L} \\ \dfrac{1}{C} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i \\ v_c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dfrac{1}{L} \\ 0 \end{bmatrix} v_i$$


Dr. Francisco M. Gonzalez-Longatt, fglongatt@ieee.org