

CAPÍTULO IV

IMPEDANCIAS SERIES DE LAS LÍNEAS DE TRANSMISIÓN

Los circuitos que conforman el sistema de transmisión de un sistema de potencia físicamente están representados por las Líneas de Transmisión. Por lo que se ha hecho costumbre hablar de Líneas de Transmisión, para referirse a los circuitos de transmisión. La función del sistema de transmisión es interconectar los nodos de generación con los nodos de carga. Los nodos de un sistema de potencia están representados físicamente por subestaciones, estas disponen del espacio físico adecuado para la entrada y salida de los diferentes circuitos con sus respectivos interruptores, seccionadores, equipo de protección y medición, y transformadores de potencia, si fuese necesario.

La Línea de Transmisión constituye el puente, el medio de transporte para llevar la energía generada hacia los centros de consumo: ciudades, industrias, etc. Como medio de transporte, las Líneas de Transmisión deben ser capaces de transmitir la energía eléctrica de un punto a otro de manera confiable y económica, dentro de las condiciones técnicas exigidas.

En la actualidad la mayoría de las Líneas de Transmisión son aéreas, aunque la transmisión subterránea mediante cables aislados es un hecho, aún su costo es prohibitivo frente al costo de las líneas aéreas. La Línea de Transmisión mediante cables aislados solo se utiliza en aquellos casos donde técnicamente solo es factible el uso de estos; por ejemplo la interconexión entre islas y tierra firme.

Físicamente, las líneas aéreas están constituidas por los conductores eléctricos soportados por torres o estructuras mediante cadenas de aisladores. Los conductores que pueden aparecer en una línea son de dos tipos: los conductores de fase, encargados de la transmisión de energía y los conductores o cables de guarda, cuya función es proteger a los conductores de fase contra la descarga de rayos.

Para el estudio de los sistema de potencia es necesario conocer como se relaciona los voltajes y las corrientes en una Línea de Transmisión, con el fin de obtener modelos matemáticos y/o circuitales que permitan establecer de una manera directa, las relaciones entre los voltajes, corrientes y potencias de los extremos de una línea.

4.1. Impedancias Series.

A continuación se hablará del parámetro inductivo únicamente, pero es imposible hablar del efecto inductivo sin tomar en cuenta la resistencia del conductor. De aquí el nombre de impedancia a este parámetro conjunto. El adjetivo *serie* tiene su origen en los modelos circuitales utilizados para representar las líneas de transmisión que son estudiadas.

Para la determinación de la impedancia serie se considerará sólo la caída de tensión en un Sistema de conductores paralelos. No se tomará en cuenta la corriente Shunt a través de las capacitancias entre conductores o a tierra. O sea que las corrientes se asumirán constantes a todo lo largo de los conductores. Cuando se esté estudiando el fenómeno de campo magnético se supondrá que la resistencia de los conductores es cero. Posteriormente al escribir las correspondientes impedancias propias de los conductores se incluirá la correspondiente resistencia.

4.1.1 CONCEPTO DE CAMPO MAGNÉTICO

4.1.1.1 Tensión Inductiva en un Conductor Rectilíneo “Enlazado” por un Flujo Magnético.

Supóngase que se tiene un conductor “a” enlazado por un flujo total ϕ (ψ_a). Se entiende por enlazado que el flujo sigue un camino cerrado alrededor del conductor.

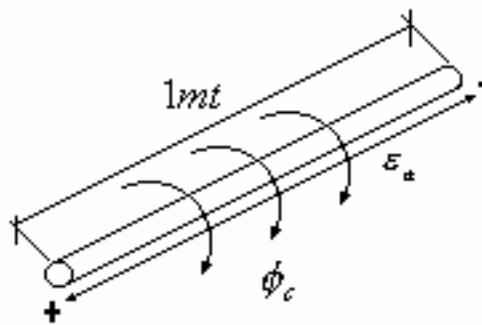


Figura 4.1. Conductor Rectilíneo Enlazado por un Flujo.

Si ψ_a es el flujo total (no importa quien produce el flujo) que rodea un metro del conductor, la tensión inducida en ese metro de conductor será;

$$\varepsilon_a = d\lambda_a / dt \quad (4.1)$$

La polaridad de esta tensión será tal que si se cerrase el circuito (sin fuentes externas) la corriente que fluiría crearía un flujo que se opondría a ϕ . (La relación entre la dirección del flujo y la de la corriente puede determinarse por la “regla de la mano derecha”).

4.1.1.2 Flujo producido por la Corriente que Circula por un Conductor Rectilíneo.

Cuando por un conductor fluye una corriente i_0 esta corriente produce un flujo que rodea al conductor.

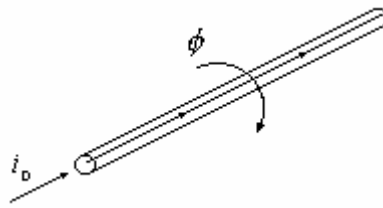


Figura 4.2. Corriente i_0 a través de un conductor.

4.1.1.3 Campo Magnético Producido por una Corriente I .

De acuerdo con la Ley de Ampere;

$$\oint_S \vec{H} \cdot d\vec{l} = I \quad (4.2)$$

\oint_S = La Integral de línea sobre un contorno que encierre la corriente I .

I = Corriente en Ampere.

\vec{H}_x = Vector de Intensidad de Campo Magnético
(Unidades MKS).

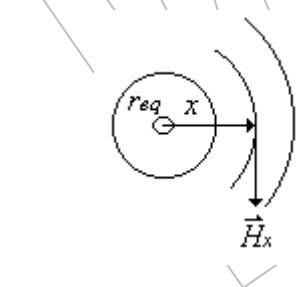


Figura 4.3. Sección Transversal de un Conductor

Tomando como trayectoria una circunferencia alrededor del conductor, \vec{H} será constante (por simetría) y tangencial a la circunferencia (regla de la mano derecha). Entonces;

$$\oint_S \vec{H}_x \cdot d\vec{l} = I \quad (4.3)$$

$$\Rightarrow H_x \cdot 2\pi x = I$$

$$\Rightarrow H_x = \frac{I}{2\pi \cdot x} \quad (4.4)$$

$$\vec{B} = \mu \cdot \vec{H} \quad (4.5)$$

\vec{B} = Densidad de Flujo Magnético (Unidades MKS).

μ = Permeabilidad Magnética del Medio (Unidades MKS).

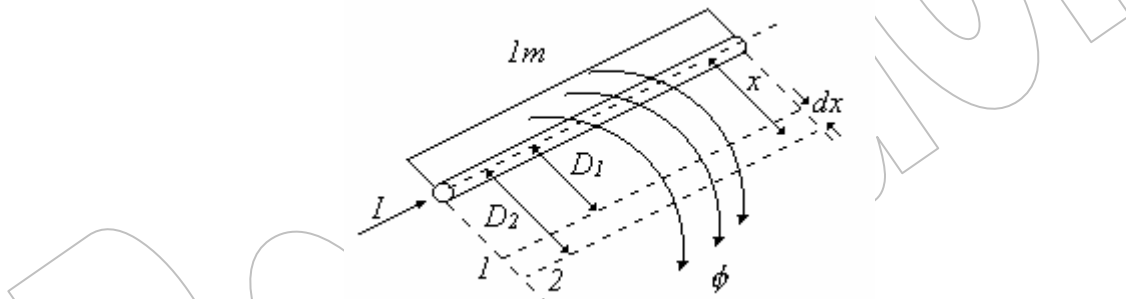


Figura 4.4. Campo Magnético originado por una corriente I.

La cantidad de flujo que atraviesa una sección como la mostrada en la Figura 4.4, será;

$$\phi = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{A} \Rightarrow dA = lm \cdot dx \quad S : \text{Superficie.}$$

$$\phi_{12} = \int_{D1}^{D2} B \cdot dA = \int_{D1}^{D2} \mu \cdot \frac{I}{2\pi x} \cdot dx = \frac{\mu I}{2\pi} \cdot \int_{D1}^{D2} \frac{dx}{x}$$

$$\Rightarrow \phi_{12} = \frac{\mu I}{2\pi} \cdot \text{Ln}\left(\frac{D2}{D1}\right) \quad (4.6)$$

$$\Rightarrow \mu = \mu_r \cdot \mu_0 \quad \begin{array}{l} \mu_r : \text{Permeabilidad Relativa.} \\ \mu_0 : \text{Permeabilidad del Vacío.} \end{array}$$

$$\Rightarrow \mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \quad (\text{Unidades MKS}) \quad (4.7)$$

Para el aire $\mu_r \approx 1$, entonces;

$$\begin{aligned} \phi_{12} &= \frac{1 \cdot 4\pi \cdot 10^{-7}}{2\pi} \cdot I \cdot \text{Ln}\left(\frac{D2}{D1}\right) \quad (\text{Unidades MKS}) \\ \phi_{12} &= 2 \cdot 10^{-7} \cdot I \cdot \text{Ln}\left(\frac{D2}{D1}\right) \quad (\text{Unidades MKS}) \end{aligned} \quad (4.8)$$

$D1$ y $D2$ deben tener las mismas unidades pues el cociente debe ser adimensional. Las unidades de $D1$ y $D2$ pueden estar en cualquier sistema (con tal que sean las mismas). Ya que como el logaritmo es adimensional no afecta las unidades de ϕ .

4.1.2 Concepto de Radio Equivalente.

El concepto de radio equivalente está basado en dos tipos de conductores; los conductores sólidos formado por un solo hilo donde el radio equivalente es el mismo radio del conductor, y los conductores formados por hebras o alambres en donde el radio equivalente del conductor viene dado por un RMG del conductor.

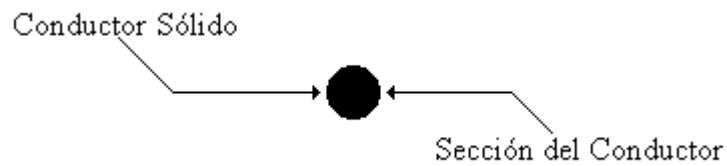


Figura 4.5. Conductor Sólido.

La corriente I se distribuirá por toda la sección del conductor. En el caso de corriente directa, la densidad de corriente en toda la superficie sería uniforme. En el caso de corriente alterna, debido al efecto pelicular la corriente aumentaría de densidad hacia la periferia.

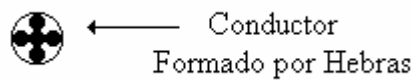


Figura 4.6. Conductor de Hebras o Alambre.

A efectos del flujo producido por la corriente que circula por el conductor, el conductor real se puede sustituir por un tabular equivalente;

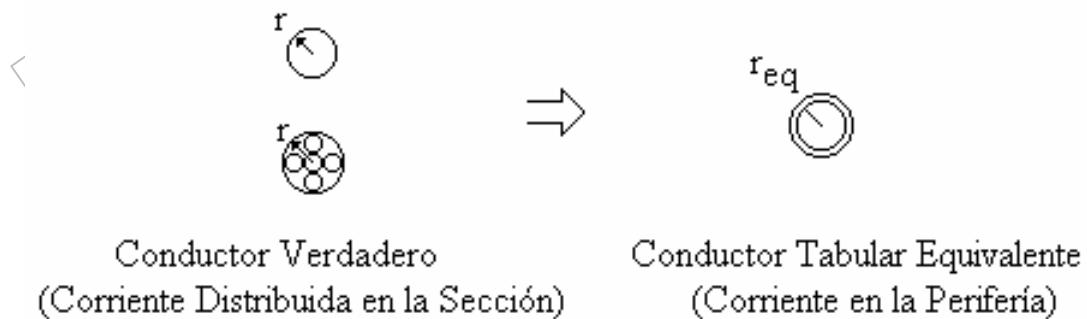


Figura 4.7. Representación de Conductores

Puede determinarse para tomar en cuenta:

- a) Geometría interna del conductor (sólido, con hebras del mismo material, hebras de diferentes material, forma).

b) Frecuencia y temperatura (Efecto pelicular).

Los valores normalmente dados por los fabricantes de Conductores.

$$r_{eq} = RMG \text{ ("Radio Medio Geométrico")}.$$

Sólo se toma en cuenta la geometría del conductor y no están corregidos por efecto pelicular.

Valores RMG ;

Para un Conductor sólido,

$$r_{eq} = r \cdot e^{-\mu_{ri}/4} \tag{4.9}$$

μ_{ri} = Permeabilidad magnética relativa del material conductor.

$\mu_{ri} \approx 1$ Para aluminio o cobre (materiales no magnéticos).

$$\text{Entonces; } r_{eq} = r \cdot e^{-1/4} = 0.7788 \cdot r \tag{4.10}$$

$\mu_{ri} > 1$ Para materiales magnéticos.

Para los conductores no magnéticos formados por hebras el coeficiente será menor de 0.7788.

4.1.3 Impedancia Serie de un Circuito de “m” de Conductores Paralelos sin Considerar el Efecto de Tierra.

En la siguiente figura se presenta un circuito formado por “m” conductores, al cual se desea determinar el flujo total que rodea a cada uno de los conductores que conforman el circuito para luego determinar la impedancia propia y mutua de cada conductor, tomando en cuenta un punto cualquiera de referencia en el espacio común para todos los conductores.

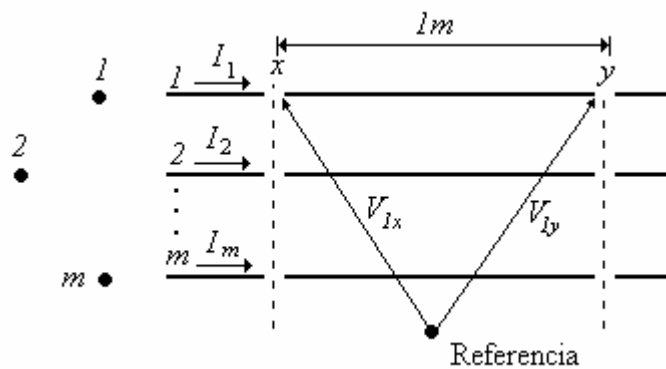


Figura 4.8. Circuito de “m” conductores.

La suma total de las corrientes que “entran” por una sección (por ejemplo x) debe ser cero;

$$I_1 + I_2 + \dots + I_m = 0 \tag{4.11}$$

4.1.3.1 Enlaces de Flujo Alrededor de Cada Conductor.

Se considerará una sección perpendicular a los conductores. Sea X un punto arbitrario. Se representará cada conductor por su radio equivalente.

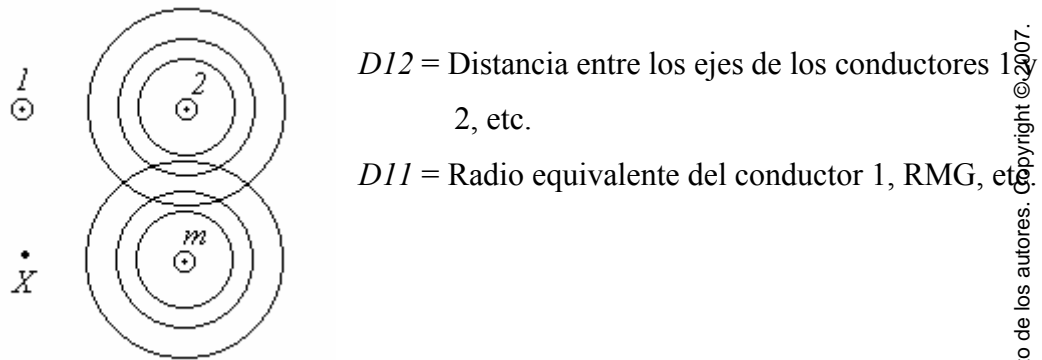


Figura 4.9. Enlaces de Flujo de cada Conductor.

- a) La presencia del material magnético de los conductores no modifica el patrón del campo magnético.
- b) Para determinar por ejemplo el flujo producido por la I_2 que enlaza al conductor 1 hasta una distancia D_{2X} , se asumirá que el radio del conductor 1 es despreciable y que el conductor puede representarse por una línea. (Esta suposición es razonable en vista de que el radio del conductor es pequeño comparado con otras distancias envueltas. Si el conductor es de material no magnético el resultado que se obtiene es completamente exacto).
- c) No se toma en cuenta el efecto de proximidad (desplazamientos de las corrientes debido a la presencia de las demás).

4.1.3.2 Flujo Total que Rodea el Conductor 1 hasta el punto X:

De acuerdo con (4.8) considerando cada una de las corrientes,

$$\psi_1(x) = 2 \cdot 10^{-7} \left[I_1 \cdot \ln\left(\frac{D_{1X}}{D_{11}}\right) + I_2 \cdot \ln\left(\frac{D_{2X}}{D_{21}}\right) + \dots + I_m \cdot \ln\left(\frac{D_{mX}}{D_{m1}}\right) \right] \quad (4.12)$$

$$\psi_1(x) = 2 \cdot 10^{-7} \left\{ \left[I_1 \cdot \text{Ln} \left(\frac{1}{D_{11}} \right) + I_2 \cdot \text{Ln} \left(\frac{1}{D_{21}} \right) + \dots + I_m \cdot \text{Ln} \left(\frac{1}{D_{m1}} \right) \right] + [I_1 \cdot \text{Ln} D_{1X} + I_2 \cdot \text{Ln} D_{2X} + \dots + I_m \cdot \text{Ln} D_{mX}] \right\} \quad (4.13)$$

El flujo total que enlaza al conductor 1 se obtendrá haciendo tender: $X \rightarrow \infty$.
En este caso;

$$D_{1X} \cong D_{2X} \cong \dots \cong D_{mX} \quad (4.14)$$

Además en un circuito necesariamente se tendrá que;

$$I_1 + I_2 + \dots + I_m = 0 \quad (4.15)$$

El segundo miembro de (4.13) queda;

$$\lim_{X \rightarrow \infty} [I_1 \cdot \text{Ln} D_{1X} + I_2 \cdot \text{Ln} D_{2X} + \dots + I_m \cdot \text{Ln} D_{mX}] = \lim_{X \rightarrow \infty} [I_1 + I_2 + \dots + I_m] = 0 \quad (4.16)$$

O más claramente desde el punto de vista matemático, de (4.15) se tiene;

$$I_m = -I_1 - I_2 - \dots - I_{m-1} \quad (4.17)$$

Sustituyendo (4.17) en el segundo miembro de (4.13) se tiene;

$$\begin{aligned} & \lim_{X \rightarrow \infty} [I_1 \cdot \text{Ln} D_{1X} + I_2 \cdot \text{Ln} D_{2X} + \dots + (-I_m \text{Ln} D_{mX} - I_m \text{Ln} D_{mX} - \dots - I_{m-1} \text{Ln} D_{(m-1)X})] = \\ & \lim_{X \rightarrow \infty} \left[I_1 \cdot \text{Ln} \left(\frac{D_{1X}}{D_{mX}} \right) + I_2 \cdot \text{Ln} \left(\frac{D_{2X}}{D_{mX}} \right) + \dots + I_{m-1} \cdot \text{Ln} \left(\frac{D_{(m-1)X}}{D_{mX}} \right) \right] \end{aligned} \quad (4.18)$$

Cuando $X \rightarrow \infty$ se tiene que $\frac{D_{1X}}{D_{mX}}, \frac{D_{2X}}{D_{mX}}, \dots, \frac{D_{(m-1)X}}{D_{mX}}$, tienden a 1 y por ende;

$$\lim_{X \rightarrow \infty} \left[I_1 \cdot \ln\left(\frac{D_{1X}}{D_{mX}}\right) + I_2 \cdot \ln\left(\frac{D_{2X}}{D_{mX}}\right) + \dots + I_{m-1} \cdot \ln\left(\frac{D_{(m-1)X}}{D_{mX}}\right) \right] = \lim_{X \rightarrow \infty} \rightarrow 0 \quad (4.19)$$

El flujo total que enlaza al conductor 1 queda entonces;

$$\psi_1 = 2 \cdot 10^{-7} \left[I_1 \cdot \ln\left(\frac{1}{D_{11}}\right) + I_2 \cdot \ln\left(\frac{1}{D_{21}}\right) + \dots + I_m \cdot \ln\left(\frac{1}{D_{m1}}\right) \right] \quad (4.20)$$

La tensión inducida por metro de conductor será;

$$e_1 = \frac{d\lambda_1}{dt} = \Delta V_1 \quad (\text{en cada metro}) \quad (4.21)$$

En régimen sinusoidal si las corrientes se representan en forma de fasores;

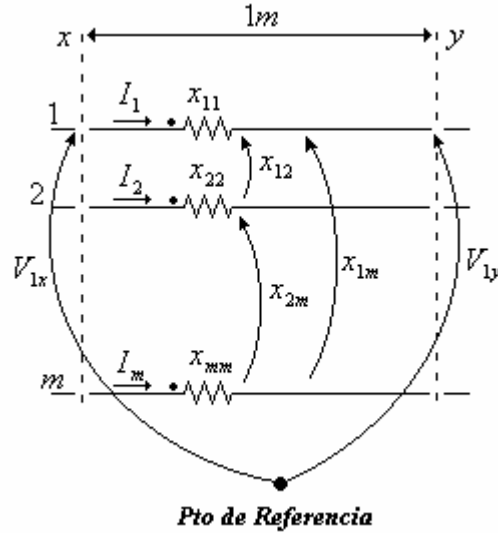
$$dI/dt = j\omega \cdot I \quad (4.22)$$

Entonces;

$$\Delta V_1 = j\omega \cdot 2 \cdot 10^{-7} \left[I_1 \cdot \ln(1/D_{11}) + I_2 \cdot \ln(1/D_{21}) + \dots + I_m \cdot \ln(1/D_{m1}) \right] \quad (4.23)$$

Donde la tensión ΔV_1 y las corrientes I_1, I_2, \dots, I_m son fasores.

Esta relación puede representarse por un “circuito equivalente” en el que cada conductor es reemplazado por una inductancia propia y una mutua;



$$\begin{aligned} \Delta V_1 &= V_{1x} - V_{1y} \\ \Delta V_2 &= V_{2x} - V_{2y} \\ &\vdots \\ \Delta V_m &= V_{mx} - V_{my} \end{aligned} \quad (4.24)$$

Figura 4.10. Representación Circuital Equivalente de un grupo de m conductores.

$$\Delta V_1 = jX_{11}I_1 + jX_{12}I_2 + \dots + jX_{1m}I_m \quad (4.25)$$

Comparando (4.23) con (4.25) se obtiene;

$$X_{11} = 2 \cdot 10^{-7} \omega \cdot Ln(1/D_{11}) \quad (\Omega/m) \quad (4.26)$$

$$X_{12} = 2 \cdot 10^{-7} \omega \cdot Ln(1/D_{12}) \quad (\Omega/m) \quad (4.27)$$

Por definición:

X_{11} = Reactancia “Propia” del conductor 1.

X_{12} = Reactancia “Mutua” entre los conductores 1 y 2.

Observaciones.

Para que las definiciones (4.26) y (4.27) tengan sentido es preciso que haya más de un conductor (al menos 2) en el circuito. Esto puede verse de (4.12) y (4.13). Si hubiese un solo conductor por ejemplo el 1 que llevase una corriente I , el segundo corchete no se anularía $\psi_1 = \infty \Rightarrow \Delta V = \infty$. Esto no puede ocurrir en la realidad pues necesariamente para que circule corriente tiene que haber necesariamente un circuito cerrado, y por lo tanto un conductor de retorno.

Unidades.

Para $f = 60\text{Hz}$ y en (Ω/Km) , (4.26) y (4.27) serán,

$$2 \cdot 10^{-7} \omega = 2 \cdot 10^{-7} \cdot 2\pi \cdot 60 \cdot 10^3 = 0,0753982 \quad (4.28)$$

$$X_{11} = 0,0753982 \cdot \text{Ln}(1/D_{11}) \quad (\Omega/\text{Km}) \quad (4.29)$$

$$X_{12} = 0,0753982 \cdot \text{Ln}(1/D_{12}) \quad (\Omega/\text{Km}) \quad (4.30)$$

$D_{11} = r_{1eq} = \text{RMG}$ y $D_{12} =$ Distancias entre ejes de conductores 1 y 2.

Se tiene que las unidades de las distancias pueden ser cualquiera con tal que sean consistentes, o sea, que se empleen las mismas unidades para todas las distancias.

Las Unidades de X_{11} y X_{12} no dependen de las unidades de las distancias, sino sólo de la constante utilizada.

En las tablas americanas X_{11} se da para un radio equivalente (r_{1eq}) en pies. A esta reactancia se le denomina entonces: “reactancia propia hasta 1 pie”.

En ohms por milla:

$$X_{11} = 0,1213416 \cdot \ln(1/D_{11}) \quad (\Omega/\text{Km}) \quad (4.31)$$

$$X_{12} = 0,1213416 \cdot \ln(1/D_{12}) \quad (\Omega/\text{Km}) \quad (4.32)$$

Impedancia.

Incluyendo la resistencia serie de cada conductor,

$$\begin{aligned} Z_{11} &= R_1 + jX_{11} \\ Z_{12} &= jX_{12} \end{aligned} \quad (4.33)$$

Resumen de los valores de K según las unidades.

$$\begin{aligned} \text{Para: } Z \text{ en } \Omega/\text{m (60 Hz)} &\Rightarrow K = 2 \cdot 10^{-7} \omega \\ Z \text{ en } \Omega/\text{Km (60 Hz)} &\Rightarrow K = 0.0753982 \\ Z \text{ en } \Omega/\text{mi (60 Hz)} &\Rightarrow K = 0,1213416 \end{aligned} \quad (4.34)$$

4.1.4 Impedancia Serie de un Grupo de “m” Conductores y Considerando el Efecto Tierra.

Las tensiones en cada sección perpendicular a la línea se miden ahora respecto a la “tierra efectiva” correspondiente a esa sección y donde las tensiones y las corrientes representadas en la figura 4.11 son fasores.

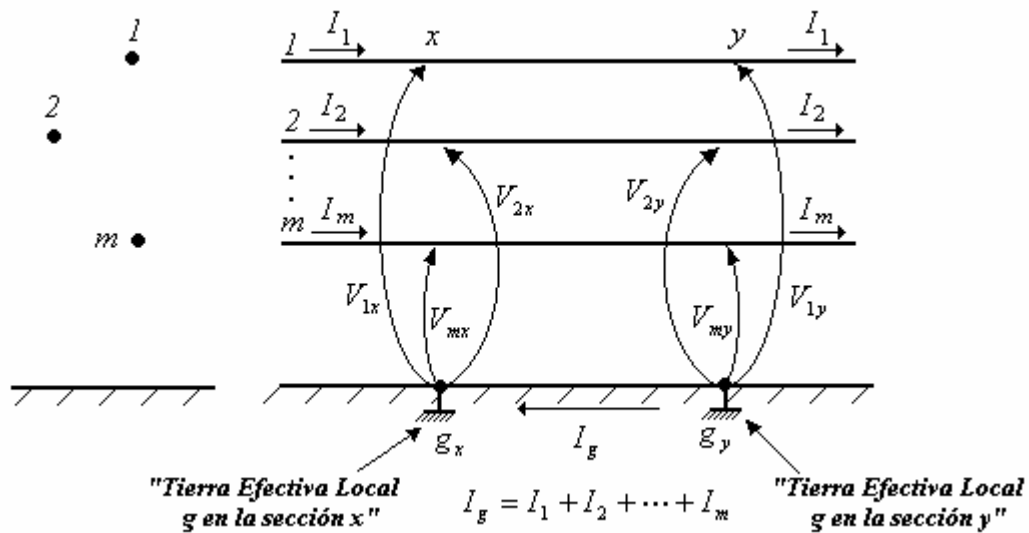


Figura 4.11. Grupo de “m” conductores considerando el efecto tierra.

Observaciones.

- Las tierras g_x y g_y no son el mismo punto, pues para $I_g \neq 0$ entre ellas habrá una diferencia de potencial. Cada sección perpendicular a la línea tendría su propia tierra efectiva local.
- Pese a que hay $m + 1$ posibles caminos para que circulen corrientes (conductores $1, 2, \dots, m$ y tierra) sólo m de las corrientes son independientes, pues necesariamente la suma de las corrientes que “entran” a una sección (por ejemplo x) debe ser cero.

$$I_1 + I_2 + \dots + I_m - I_g = 0 \Rightarrow I_1 + I_2 + \dots + I_m = I_g \quad (4.35)$$

Resulta lógico escoger como corrientes independientes a las correspondientes a los conductores, o sea, I_1, I_2, \dots, I_m .

Las caídas de tensión entre las secciones x e y correspondientes a cada conductor podrán expresarse (por ser la red lineal) como una combinación lineal de estas corrientes independientes. Por ejemplo;

$$V_{1x} - V_{2y} = \Delta V_1 = Z_{11g}I_1 + Z_{12g}I_2 + \dots + Z_{1mg}I_m \quad (4.36)$$

$Z_{11g}, Z_{12g}, \dots, Z_{1mg}$ = Son los coeficientes que se van a determinar.

En la determinación de estos coeficientes se verá su significado y la razón de las siguientes denominaciones:

Z_{11g} = Impedancia “Propia” del conductor 1 tomando en cuenta el efecto tierra.

Z_{12g} = Impedancia “Mutua” entre los conductores 1 y 2 tomando en cuenta el efecto tierra.

En general;

$$\begin{bmatrix} \Delta V_1 \\ \Delta V_2 \\ \vdots \\ \Delta V_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{11g} & Z_{12g} & \dots & Z_{1mg} \\ Z_{21g} & Z_{22g} & \dots & Z_{2mg} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Z_{m1g} & Z_{m2g} & \dots & Z_{mmg} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ \vdots \\ I_m \end{bmatrix} \quad (4.37)$$

Y donde cada elemento Z_{ijg} de la matriz es un fasor igual que las tensiones y las corrientes

$$\Delta V = Z \cdot I \quad (4.38)$$

Donde ΔV es el vector de tensión de la ecuación (4.37).

Z es la matriz de impedancia de la ecuación (4.37).

I es el vector de corriente de la ecuación (4.37).

4.1.4.1 Determinación de los Elementos de la Matriz de Impedancias.

A continuación se procede a determinar los elementos que conforman la matriz presentada en la ecuación (4.37), se realizará de dos formas; en la primera parte se presenta como se determinan los elementos de la diagonal o las impedancias propias de cada conductor y en la segunda parte se determinan los elementos fuera de la diagonal o impedancias mutuas del circuito.

4.1.4.1.1 Impedancias propias considerando el efecto de la tierra (Z_{11g}).

De la figura 4.11., con $I_1 = I_1, I_2 = I_3 = \dots = I_m = 0$,

$$\Delta V_1 = Z_{11g} I_1 \quad (4.39)$$

Si no circula corriente por los conductores $2, 3, \dots, m$; su efecto sobre el patrón de campo magnético creado por \vec{I}_1 es despreciable.

Cortocircuitando el extremo “y”, y aplicando una fuente de tensión en el extremo “x” podría medirse Z_{11g} .

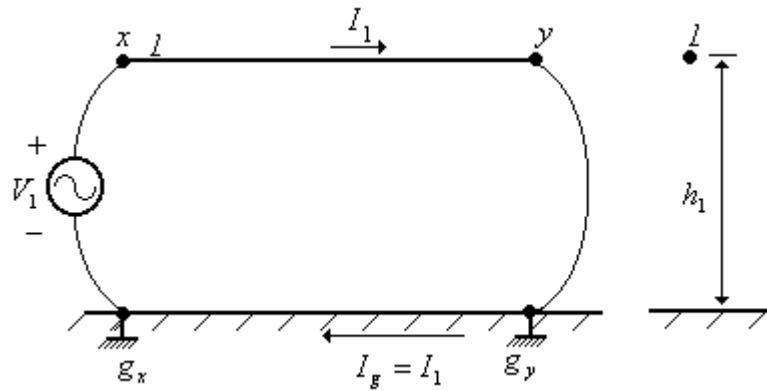


Figura 4.12. Circuito para determinar Z_{11g} .

En la figura 4.12;

$$\begin{aligned} \Delta V_1 &= V_{1x} - V_{1y} = V_1 - 0 = V_1 = Z_{11g} I_1 \\ \Rightarrow Z_{11g} &= V_1 / I_1 \end{aligned} \quad (4.40)$$

Donde V_1 es la tensión aplicada al conductor 1, I_1 es la corriente que circula por el conductor 1 y Z_{11g} es la impedancia del conductor 1 y como la tensión y la corriente son fasores entonces la impedancia es un fasor.

Para poder resolver analíticamente el circuito de la figura 4.12 habrá que modelar de alguna manera el camino de retorno de la corriente \vec{I}_1 , o sea, la tierra. A este fin se considera dos cosas:

- a) Tierra Ideal: Se entenderá por tierra ideal:
 - i. Resistividad cero ($\rho = 0$)
 - ii. Superficie plana.

- b) Tierra "Real": Se entenderá por tierra "real":

- i. Resistividad distinta de cero ($\rho \neq 0$)
- ii. Superficie plana.
- iii. Isomórfica, es decir ρ constante en toda la tierra en cualquier dirección: hacia arriba, hacia abajo, hacia los lados, etc.

Obsérvese que se escribe real entre comillas, pues en la realidad la tierra no es isomórfica ni plana. Se supondrá además que la altura al conductor sobre el suelo es constante (no se toma en cuenta el efecto del pandeo entre torre y torre).

Caso Tierra Ideal: ($\rho = 0$)

En este caso la corriente de retorno I_g en el sistema de la figura 4.12, fluye por la superficie de la tierra debajo del conductor. La densidad de la corriente es mayor directamente debajo del conductor. La tierra con $\rho = 0$ es equivalente a una lámina metálica infinita con $\rho = 0$.

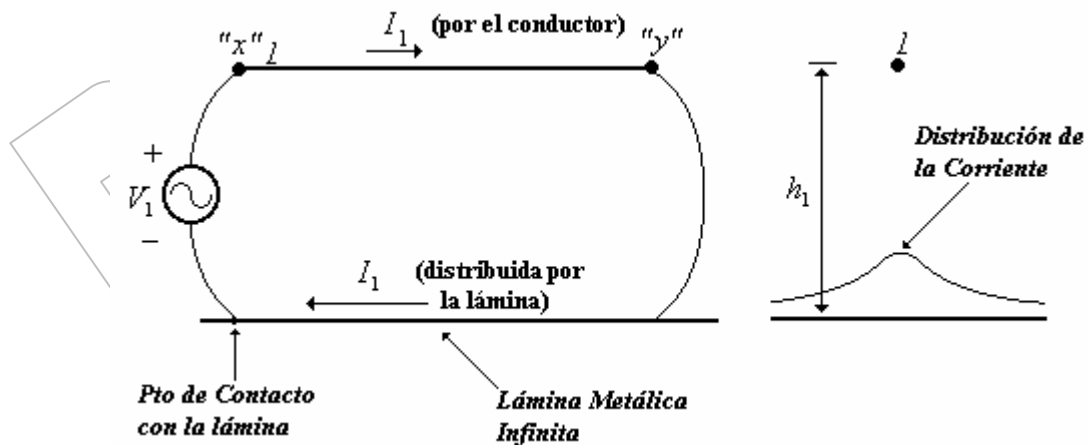


Figura 4.13. Circuito para determinar la impedancia propia con distribución de la corriente.

Por teoría de Campo Magnético el sistema de la figura 4.13, es equivalente, aplicando el Modelo de las Imágenes al mostrado en la figura 4.14.

El Modelo de las Imágenes consiste en que si el terreno es un conductor perfecto el Campo Magnético no puede penetrar en él. La corriente de retorno circulará como una lámina muy delgada de corriente superficial. El efecto del terreno como retorno puede ser reemplazado por el de un conductor imagen situado a una distancia " h_1 " por debajo de la superficie del terreno.

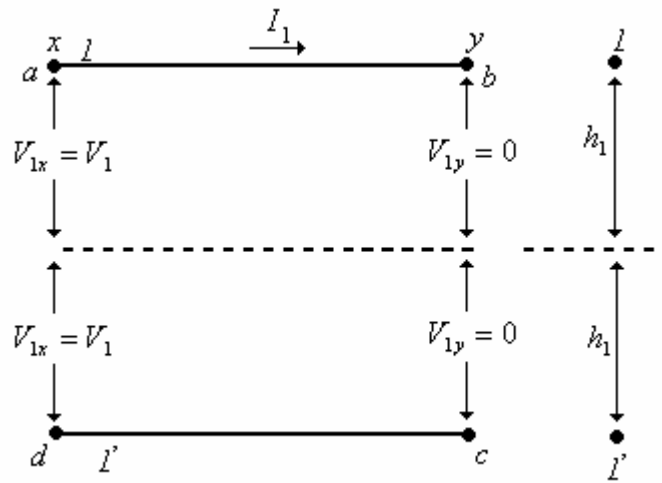


Figura 4.14. Circuito aplicando al método de las imágenes

El sistema de la figura 4.14, puede resolverse por teoría de campo aplicando la Ley de Faraday o, circuitalmente aplicando el concepto de impedancias propias y mutuas para grupos de conductores.

4.1.4.1.1 Método De Campo:

Como en el extremo “y” está cortocircuitado se considerará una espira al recorrido *abcd*. La tensión inducida en la espira *abcd*, debido al flujo que la atraviesa debe ser igual a $2V_1$. De acuerdo con la relación (4.8) (en concepto de campos magnéticos) se tendrá:

- a) Debido a la corriente que circule por el conductor 1;

$$\phi_{11'}(1) = 2 \cdot 10^{-7} \cdot I_1 \ln(D_{11'}/D_{11})$$

- b) Debido a la corriente que circule por el conductor 1';

$$\phi_{11'}(1') = 2 \cdot 10^{-7} \cdot I_1' \ln(D_{11'}/D_{11})$$

$$I_1' = -I_1, \quad D_{11} = D_{11'}, \quad D_{11'} = D_{11}$$

El conductor imagen es igual al conductor real, entonces quedaría;

$$\phi_{1total} = 2 \cdot 2 \cdot 10^{-7} I_1 \ln(D_{11'}/D_{11}) \quad (4.41)$$

Como la corriente es un fasor entonces el flujo total del conductor ϕ_{1total} también es un fasor.

La tensión producida por este flujo será:

$$2V_1 = d\phi_1/dt = j\omega\phi \quad (4.42)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow 2V_1 &= j\omega \cdot 4 \cdot 10^{-7} I_1 \ln(D_{11'}/D_{11}) \\ \Rightarrow V_1 &= j\omega \cdot 2 \cdot 10^{-7} I_1 \ln(D_{11'}/D_{11}) \end{aligned} \quad (4.43)$$

y de (4.40), se tiene;

$$Z_{11g} = \frac{V_1}{I_1} = j \cdot 2 \cdot 10^{-7} \omega \ln(D_{11'}/D_{11}) \quad (\Omega/\text{metro}) \quad (4.44)$$

4.1.4.1.1.2 Método Circuital

Sustituyendo los conductores 1 y 1' de la figura 4.14 por dos inductancias equivalentes se obtiene un circuito equivalente de Impedancias propias y mutuas;

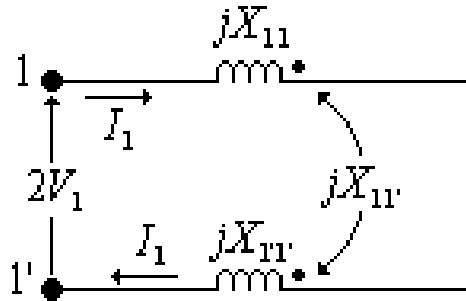


Figura 4.15. Circuito equivalente de impedancias inductivas.

En este circuito se tendrá;

$$2V_1 = jX_{11'}I_1 - jX_{11'}I_1 + jX_{11}I_1 - jX_{11'}I_1; \tag{4.45}$$

Como el conductor imagen 1' es idénticamente igual al conductor 1 ambas impedancias que representan a cada conductor también son iguales, por lo tanto se tendrá;

$$\Rightarrow (X_{11} = X_{11'}). \tag{4.46}$$

Se procede a realizar las operaciones matemáticas siguientes;

$$\begin{aligned} \Rightarrow 2V_1 &= j \cdot I_1 \cdot (X_{11'} + X_{11} - X_{11'} - X_{11'}) \\ \Rightarrow 2V_1 &= j \cdot I_1 \cdot 2 \cdot (X_{11} - X_{11'}) \end{aligned} \tag{4.47}$$

Y de (4.40) se tiene,

$$Z_{11g} = \frac{V_1}{I_1} = j \cdot (X_{11} - X_{11'}) \quad (4.48)$$

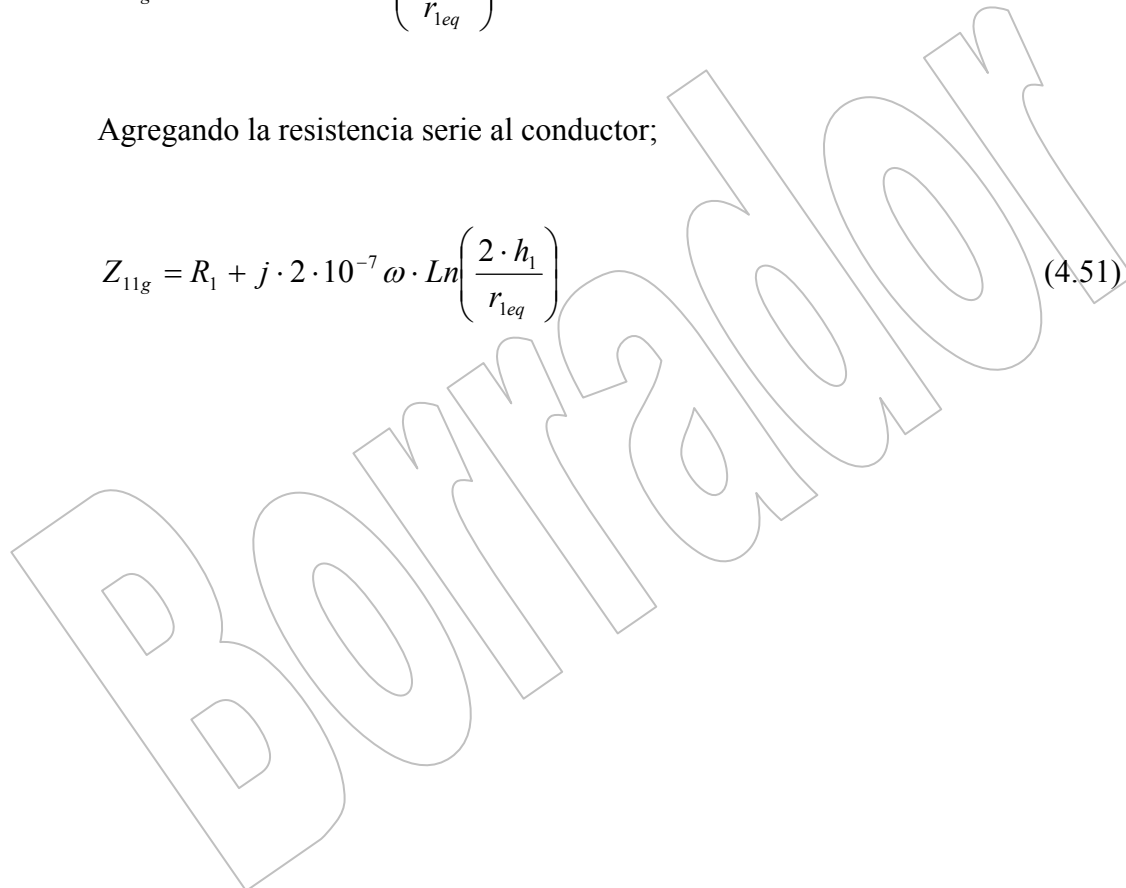
Sustituyendo X_{11} y $X_{11'}$ de (4.26) y (4.27), se tiene;

$$Z_{11g} = j \cdot 2 \cdot 10^{-7} \omega \cdot \left[\text{Ln} \left(\frac{1}{D_{11}} \right) - \text{Ln} \left(\frac{1}{D_{11'}} \right) \right] = j \cdot 2 \cdot 10^{-7} \omega \cdot \left[\text{Ln} \left(\frac{D_{11'}}{D_{11}} \right) \right] \quad (4.49)$$

$$Z_{11g} = j \cdot 2 \cdot 10^{-7} \omega \cdot \text{Ln} \left(\frac{2 \cdot h_1}{r_{1eq}} \right) \quad (4.50)$$

Agregando la resistencia serie al conductor;

$$Z_{11g} = R_1 + j \cdot 2 \cdot 10^{-7} \omega \cdot \text{Ln} \left(\frac{2 \cdot h_1}{r_{1eq}} \right) \quad (4.51)$$



4.1.4.1.2 Impedancias mutuas considerando el efecto de la tierra (Z_{12g}).

De la ecuación (4.37) con $I_1 = I_1, I_2 = I_3 = \dots = I_m = 0$

$$\Delta V_2 = Z_{21g} \cdot I_1 \tag{4.52}$$

$$Z_{21g} = Z_{12g} \tag{4.53}$$

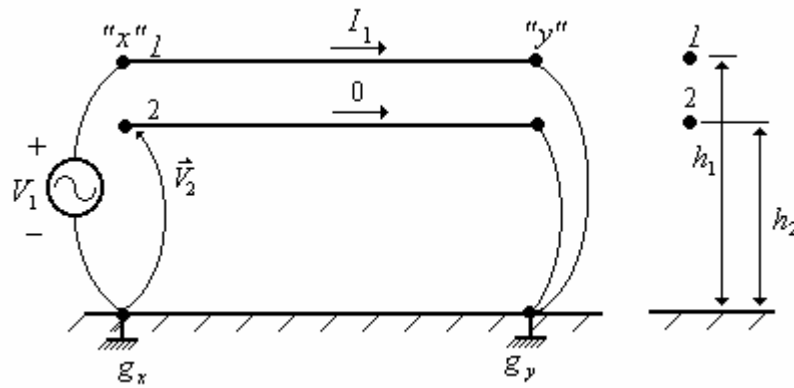


Figura 4.16. Circuito para determinar la impedancia mutua.

Al igual que en la determinación de la impedancia propia las corrientes y las tensiones representadas en la figura 4.16 son fasores.

$$\Delta V_2 = V_{2x} - V_{2y} = V_2$$

Caso Tierra Ideal: ($\rho = 0$)

Para el caso tierra ideal el circuito de la figura 4.16, se puede reemplazar (aplicando el método de las imágenes) por el de la figura 4.17.

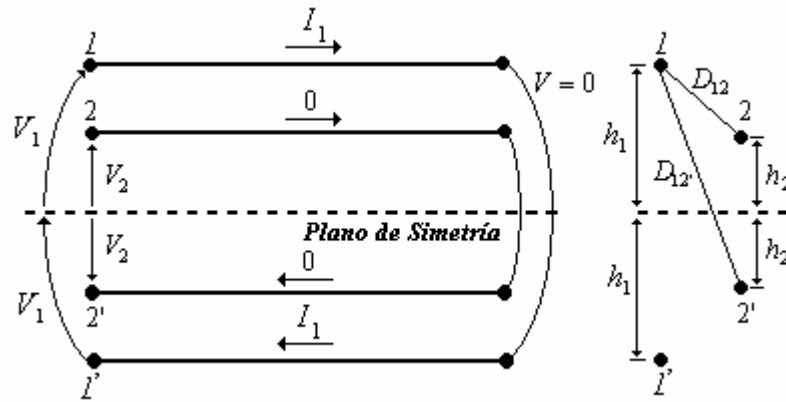


Figura 4.17. Circuito aplicando el modelo de las imágenes.

4.1.4.1.2.1 Método de Campo.

Tensión Inducida en la espira 2-2' debido a la corriente en el conductor 1;

$$\phi_{22'}(1) = 2 \cdot 10^{-7} I_1 \text{Ln}(D_{12'}/D_{12}) \tag{4.54}$$

$$\phi_{22'}(1') = 2 \cdot 10^{-7} I_1' \text{Ln}(D_{1'2'}/D_{1'2}) \tag{4.55}$$

con $I_1' = -I_1$, $D_{12'} = D_{1'2}$, $D_{12} = D_{1'2'}$

$$\phi_{22'total} = 2 \cdot 2 \cdot 10^{-7} I_1 \text{Ln}(D_{12'}/D_{12}) \tag{4.56}$$

$$2\vec{V}_2 = \frac{d\vec{\phi}_{22'total}}{dt} \Rightarrow 2\vec{V}_2 = j \cdot 2 \cdot 2 \cdot 10^{-7} \omega \cdot \vec{I}_1 \cdot \text{Ln}(D_{12'}/D_{12})$$

$$\Rightarrow Z_{12} = Z_{21} = j \cdot 2 \cdot 10^{-7} \omega \cdot \text{Ln}(D_{12'}/D_{12}) \quad (\Omega/\text{metro}) \tag{4.57}$$

4.1.4.1.2.2 Método Circuital

Representando cada conductor por su impedancia propia y mutua;

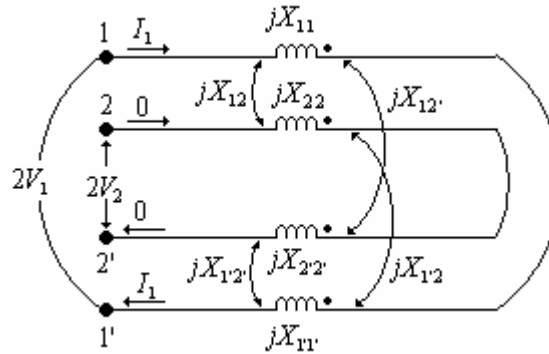


Figura 4.18. Circuito Inductivo para la determinación de la impedancia mutua.

$$2V_2 = I_1 jX_{1'2'} - I_1 jX_{1'2} + I_1 jX_{12} - I_1 jX_{12} \quad (4.58)$$

ya que el conductor imagen 1' es idéntico al conductor 1 y el conductor imagen 2' también es idéntico al conductor 2 entonces se tiene;

$$X_{1'2'} = X_{12}, \quad X_{1'2} = X_{12} \quad (4.59)$$

Se procede a operar matemáticamente, de la siguiente forma;

$$2V_2 = 2I_1 j(X_{12} - X_{12'})$$

$$Z_{21g} = \frac{V_2}{I_1} = j(X_{12} - X_{12'}) \quad (4.60)$$

De (4.26) y (4.27), quedaría

$$Z_{21g} = j \cdot 2 \cdot 10^{-7} \omega \cdot \ln(D_{12}'/D_{12}) \quad (\Omega/\text{metro}) \quad (4.61)$$

Efecto de la Resistividad de la Tierra: ($\rho \neq 0$)

Para $\rho \neq 0$ la corriente ya no va a circular por la superficie de la tierra sino que penetrará hasta una cierta profundidad “buscando una sección más grande para circular”, mientras mayor sea ρ mayor será esta penetración.

4.1.4.2 Circuito de la Línea Entre “x” e “y”.

En la figura 4.19.a, se representa un circuito real con “m” conductores por fase y se muestra el retorno de la corriente a través de la tierra y al cual se le desea determinar las impedancias propias y mutas entre “x” e “y”; en la figura 4.19.b, se representa el mismo circuito pero a través de un circuito equivalente en donde se muestran las impedancias propias y mutuas que corresponden a cada conductor entre “x” e “y”.

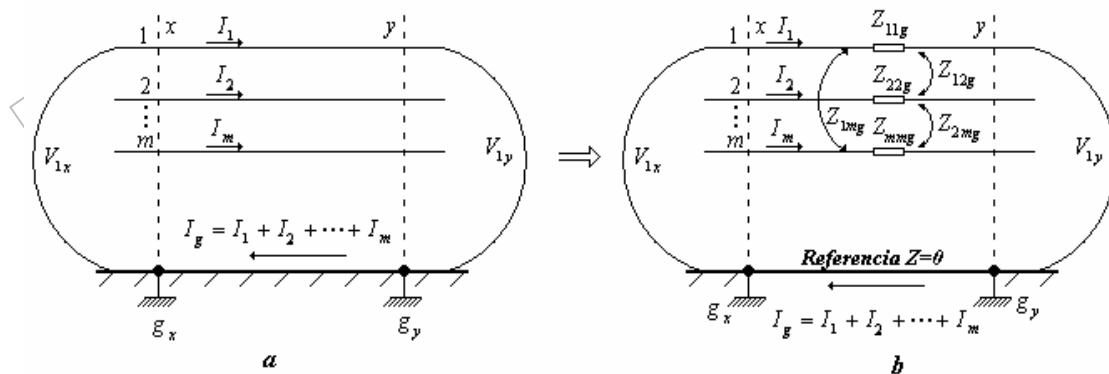


Figura 4.19. Circuito Real y Circuito Equivalente

$$\begin{bmatrix} \Delta V_1 \\ \Delta V_2 \\ \vdots \\ \Delta V_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{11g} & Z_{12g} & \cdots & Z_{1mg} \\ Z_{21g} & Z_{22g} & \cdots & Z_{2mg} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Z_{m1g} & Z_{m2g} & \cdots & Z_{mmg} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ \vdots \\ I_m \end{bmatrix} \quad (4.62)$$

Donde cada elemento de variación de tensión, corriente e impedancia son representados en forma de fasores.

El efecto de la impedancia de la tierra entre “x” e “y” ha sido incluido en las impedancias propias y mutuas de los conductores. El retorno en el circuito equivalente es a través de un conductor de referencia sin impedancia propia ni mutua.

La determinación impedancia propia Z_{11g} y la impedancia mutua Z_{12g} para una resistividad de tierra igual a cero ($\rho=0$), está expresada en las siguientes ecuaciones, basados en los procedimientos realizados anteriormente para determinar a (4.51) y (4.61);

$$Z_{11g} = R_1 + jKLn\left(\frac{2h_1}{r_{1eq}}\right) \quad (4.63)$$

$$Z_{12g} = jKLn\left(\frac{D_{12'}}{D_{12}}\right) \quad (4.64)$$

Para la determinación de la impedancia propia Z_{11g} y la impedancia mutua Z_{12g} para una resistividad diferente de cero ($\rho \neq 0$), es decir tierra real, hay que corregir los valores correspondientes. Las impedancias del tramo total de la línea se obtienen multiplicando las impedancias por unidad de longitud por la longitud total de la línea.

4.1.5 Conductores en Haz sin Cable de Guarda Considerando El Efecto Tierra.

A continuación se presenta una línea de dos conductores por fase, en donde se desea determinar las impedancias propias y mutuas de cada fase de la línea.

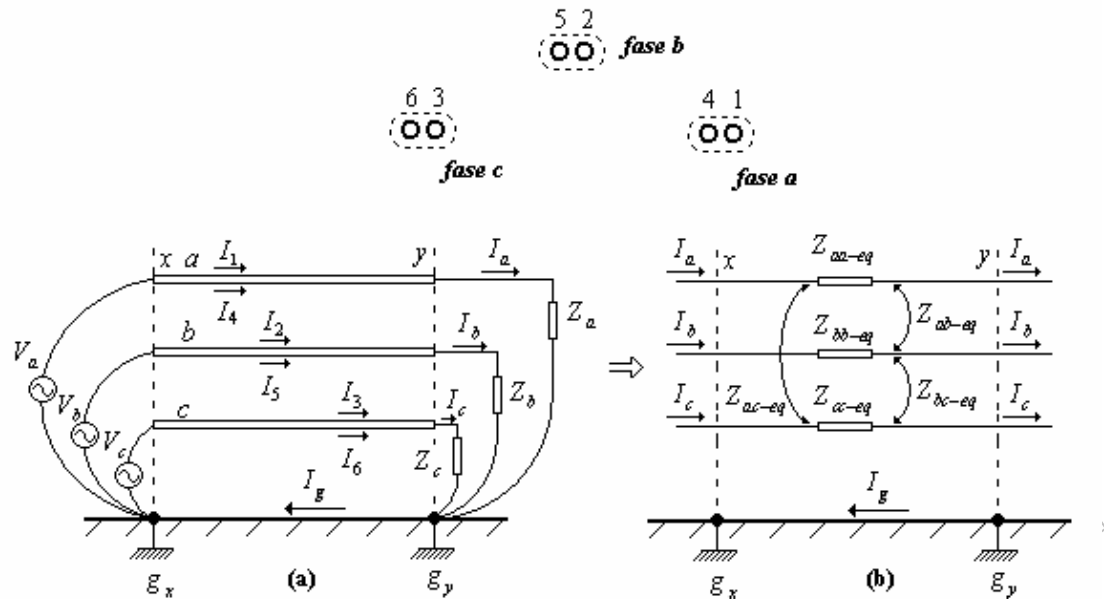


Figura 4.20. Línea con dos conductores por fase.

A partir del circuito de la figura 4.20 (a) se quiere obtener un circuito equivalente como el mostrado en la figura 4.20 (b).

Al igual que en las secciones anteriores las corrientes y tensión representadas en la figura 4.20 son fasores;

$$\begin{bmatrix} \Delta V_1 \\ \Delta V_2 \\ \Delta V_3 \\ \Delta V_4 \\ \Delta V_5 \\ \Delta V_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{11-g} & Z_{12-g} & Z_{13-g} & Z_{14-g} & Z_{15-g} & Z_{16-g} \\ Z_{21-g} & Z_{22-g} & Z_{23-g} & Z_{24-g} & Z_{25-g} & Z_{26-g} \\ Z_{31-g} & Z_{32-g} & Z_{33-g} & Z_{34-g} & Z_{35-g} & Z_{36-g} \\ Z_{41-g} & Z_{42-g} & Z_{43-g} & Z_{44-g} & Z_{45-g} & Z_{46-g} \\ Z_{51-g} & Z_{52-g} & Z_{53-g} & Z_{54-g} & Z_{55-g} & Z_{56-g} \\ Z_{61-g} & Z_{62-g} & Z_{63-g} & Z_{64-g} & Z_{65-g} & Z_{66-g} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \\ I_5 \\ I_6 \end{bmatrix} \quad (4.65)$$

Y donde las impedancias de la ecuación (4.65) también son fasores.

La matriz (4.65) se va a representar en forma de submatrices como se muestra en (4.66), realizando las operaciones matemáticas necesarias para que al final sólo se tenga una matriz equivalente de impedancias de orden 3x3;

$$\begin{bmatrix} \Delta V_M \\ \Delta V_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{MM} & Z_{MN} \\ Z_{NM} & Z_{NN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_M \\ I_N \end{bmatrix} \quad (4.66)$$

Donde; ΔV_M y ΔV_N son vectores de tensión de orden 3x1 de la ecuación (4.65).

I_M e I_N son vectores de corriente de orden 3x1 de la ecuación (4.65).

Z_{MM}, Z_{MN}, Z_{NM} y Z_{NN} son submatrices de orden 3x3 de impedancia de la ecuación (4.65).

Por condiciones terminales se tiene que en el extremo “x” la caída de tensión de cada conductor se toma desde el conductor hasta la tierra g_x , entonces la tensión del conductor 1 y el conductor 4 son iguales y esta tensión se denominará V_{ax} ya que los conductores 1 y 4 representan la fase “a”; esta condición se aplica para las otras fases, entonces se tiene;

$$\begin{aligned} V_{1x} &= V_{4x} = V_{ax} \\ V_{2x} &= V_{5x} = V_{bx} ; \\ V_{3x} &= V_{6x} = V_{cx} \end{aligned} \quad (4.67)$$

Se realiza el mismo procedimiento para el extremo “y”. O sea que;

$$\begin{aligned} V_{1y} &= V_{4y} = V_{ay} \\ V_{2y} &= V_{5y} = V_{by} ; \\ V_{3y} &= V_{6y} = V_{cy} \end{aligned} \quad (4.68)$$

Por lo tanto se tiene;

$$\begin{bmatrix} V_{1x} - V_{1y} \\ V_{2x} - V_{2y} \\ V_{3x} - V_{3y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta V_1 \\ \Delta V_2 \\ \Delta V_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_{4x} - V_{4y} \\ V_{5x} - V_{5y} \\ V_{6x} - V_{6y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta V_4 \\ \Delta V_5 \\ \Delta V_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_{ax} - V_{ay} \\ V_{bx} - V_{by} \\ V_{cx} - V_{cy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta V_a \\ \Delta V_b \\ \Delta V_c \end{bmatrix} \quad (4.69)$$

Por otro lado se tiene que la sumatoria de las corrientes que circulan por los conductores que conforman la fase “a”, es igual a la corriente total de dicha fase, esta condición también se cumple para las fases “b” y “c”, entonces se tiene;

$$\begin{aligned} I_1 + I_4 &= I_a \\ I_2 + I_5 &= I_a \\ I_3 + I_6 &= I_c \end{aligned} \quad (4.70)$$

La idea es modificar (4.65) hasta obtener una relación de la forma;

$$\begin{bmatrix} \Delta V_a \\ \Delta V_b \\ \Delta V_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{aa-eq} & Z_{ab-eq} & Z_{ac-eq} \\ Z_{ba-eq} & Z_{bb-eq} & Z_{bc-eq} \\ Z_{ca-eq} & Z_{cb-eq} & Z_{cc-eq} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_a \\ I_b \\ I_c \end{bmatrix} \quad (4.71)$$

O sea,

$$\Delta V = Z_{eq} \cdot I \tag{4.72}$$

Donde ΔV es el vector de tensión equivalente de orden 3x1 de la ecuación (4.71).

Z es la matriz de impedancia equivalente de orden 3x3 de la ecuación (4.71).

I es el vector de corriente equivalente de orden 3x3 de la ecuación (4.71).

Los elementos de la matriz Z de la ecuación (4.65) se determinan según la fórmula para las impedancias propias y mutuas entre conductores considerando el efecto tierra.

Trabajando con (4.65) en forma de submatrices,

$$\begin{bmatrix} \Delta V_M \\ \Delta V_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{MM} & Z_{MN} \\ Z_{NM} & Z_{NN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_M \\ I_N \end{bmatrix} \quad \text{Todas las submatrices } Z \text{ son } 3 \times 3 \tag{4.73}$$

Restando la 1ra fila con la 2da fila y con las condiciones terminales expresadas en (4.68), se tiene que;

$$\begin{bmatrix} \Delta V_N - \Delta V_M \\ \Delta V_N - \Delta V_M \\ \Delta V_N - \Delta V_M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_4 - V_1 \\ V_5 - V_2 \\ V_6 - V_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = [0] \tag{4.74}$$

$$\begin{bmatrix} \Delta V_M \\ \Delta V_N - \Delta V_M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta V \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \text{donde } [\Delta V] = \begin{bmatrix} \Delta V_a \\ \Delta V_b \\ \Delta V_c \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \Delta V \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z_{MM} & Z_{MN} \\ Z_{NM} - Z_{MM} & Z_{NN} - Z_{MN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_M \\ I_N \end{bmatrix} \quad (4.75)$$

Se quiere ahora modificar (4.75) de modo que el vector corriente sea;

$$\begin{bmatrix} I_M + I_N \\ I_N \end{bmatrix} \quad (4.76)$$

$$\Delta V = Z_{MM}I_M + Z_{MN}I_N \quad (4.77.A)$$

$$0 = (Z_{NM} - Z_{MM})I_M + (Z_{NN} - Z_{MN})I_N \quad (4.77.B)$$

A la ecuación (4.77.A) se le suma y resta el factor $Z_{MM}I_N$ para no alterar la ecuación

Y a la ecuación (4.77.B) se le suma y resta el factor $(Z_{NM} - Z_{MM})I_N$

Efectuando las operaciones correspondientes queda;

$$\begin{aligned} \Delta V &= Z_{MM}I_M + Z_{MN}I_N + (Z_{MM}I_N - Z_{MM}I_N) \\ \Delta V &= Z_{MM}(I_M + I_N) + (Z_{MN} - Z_{MM})I_N \end{aligned} \quad (4.78)$$

$$\begin{aligned} 0 &= (Z_{NM} - Z_{MM})I_M + (Z_{NN} - Z_{MN})I_N + [(Z_{NM} - Z_{MM})I_N - (Z_{NM} - Z_{MM})I_N] \\ 0 &= (Z_{NM} - Z_{MM})(I_M + I_N) + (Z_{NN} - Z_{MN} - (Z_{NM} - Z_{MM}))I_N \\ 0 &= (Z_{NM} - Z_{MM})(I_M + I_N) + (Z_{NN} + Z_{MM} - Z_{MN} - Z_{NM})I_N \end{aligned} \quad (4.79)$$

Organizando ahora las ecuaciones (4.78) y (4.79) en forma de matrices se tiene;

$$\begin{bmatrix} \Delta V \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{MM} & Z_{MN}-Z_{MM} \\ Z_{NM}-Z_{MM} & Z_{NN} + Z_{MM} - Z_{MN} - Z_{NM} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_M + I_N \\ I_N \end{bmatrix} \quad (4.80)$$

Efectuando ahora una reducción por **Kron** para eliminar la parte inferior del vector de corriente;

$$[\Delta V] = [Z_{MM}'] \cdot [I_M + I_N] \quad (4.81)$$

$$Z_{MM}' = Z_{MM} - (Z_{MN} - Z_{MM}) \cdot (Z_{NN} + Z_{MM} - Z_{MN} - Z_{NM})^{-1} \cdot (Z_{NM} - Z_{MM}) = Z_{eq} \quad (4.82)$$

Donde $[Z_{MM}']$ es una matriz reducida por el método de kron que es equivalente a la matriz Z_{eq} definida en (4.72).

O sea que; $\Delta V = Z_{eq} \cdot I$

$$\begin{bmatrix} \Delta V_a \\ \Delta V_b \\ \Delta V_c \end{bmatrix} = Z_{eq} \cdot \begin{bmatrix} I_a \\ I_b \\ I_c \end{bmatrix} \quad (4.83)$$

- Todos los elementos de la expresión (4.82) son matrices.
- Esta expresión es válida cualquiera que sea el número de conductores que constituyen el haz.
- Para su determinación hay que calcular primero los elementos de la matriz primitiva de impedancias (4.65).
- Z_{eq} es simétrica.

Otras consideraciones:

- Suponga que en un caso determinado se ha resuelto el circuito de la figura 4.20(a), utilizando para representar la línea, el circuito de la figura 4.20(b).

Suponga entonces conocidas $I_a, I_b, I_c \Rightarrow [I] = \begin{bmatrix} I_a \\ I_b \\ I_c \end{bmatrix}$

De la segunda fila de la ecuación (4.80),

$$0 = (Z_{NM} - Z_{MM}) \underbrace{(I_M + I_N)}_I + (Z_{NN} + Z_{MM} - Z_{MN} - Z_{NM}) I_N$$

Entonces;

$$I_N = -(Z_{MM} + Z_{NN} - Z_{MN} - Z_{NM})^{-1} \cdot (Z_{NM} - Z_{MM}) \cdot I \quad (4.84)$$

Determinando I_N de esta expresión, I_M puede obtenerse de;

$$I_M = I - I_N \quad (4.85)$$

De (4.84) y (4.85) se tendrán las corrientes en cada uno de los conductores del haz.

4.1.6 Conductores Sencillos y Cables de Guarda Considerando el Efecto Tierra

A continuación se presenta ahora en la figura 4.21(a) un circuito real conformado por un conductor por fase y dos cables de guarda y en la figura 4.21(b) se presenta un circuito equivalente que representa al circuito anterior, mostrando las impedancias propias y mutuas de cada fase y sin cable de guarda ya que el efecto del cable de guarda estaría incluido en cada impedancia que conforma el circuito.

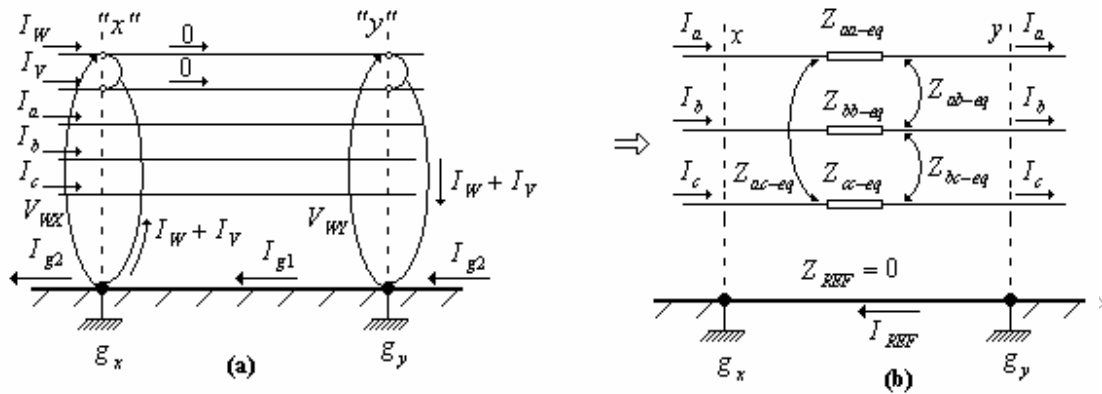


Figura 4.21. Circuito de dos conductores por fase y dos cables de guarda.

En algunas líneas de transmisión se utilizan uno o dos conductor adicional para proteger la línea contra las descargas de los rayos. Estos conductores adicionales o Cables de Guarda son incorporados en la matriz de impedancia primitiva ya que su corriente no es nula, aún cuando su voltaje se pueda asumir cero respecto al terreno por su conexión a tierra en cada una de las torres de la línea.

Basados en que los cables de guarda están conectados a tierra en cada una de las torres, se asumirá entonces que la caída de tensión de los mismos es cero;

$$\begin{aligned}
 V_{VX} &= 0; & V_{WX} &= 0 \\
 V_{VY} &= 0; & V_{WY} &= 0
 \end{aligned}
 \tag{4.86}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \Delta V_U &= V_{UX} - V_{UY} = 0 \\ \Delta V_W &= V_{WX} - V_{WY} = 0 \end{aligned} \quad (4.87)$$

En la figura 4.21(b) se muestra un circuito equivalente trifásico suprimiendo la tierra y los cables de guarda.

Supóngase por el momento que las secciones “x” e “y” se toman en las subestaciones terminales de la línea y que la impedancia de la malla de tierra de estas subestaciones es muy pequeña (se supondrá igual a cero; en la práctica puede estar típicamente entre unos dos (2) a ocho (8) ohmios). En realidad el cable de guarda se encuentra conectado a tierra en cada una de las torres de la línea.

En la siguiente figura se muestra un circuito equivalente considerando el efecto tierra y en donde se puede observar claramente que los cables de guarda se encuentran sólidamente conectados a tierra.

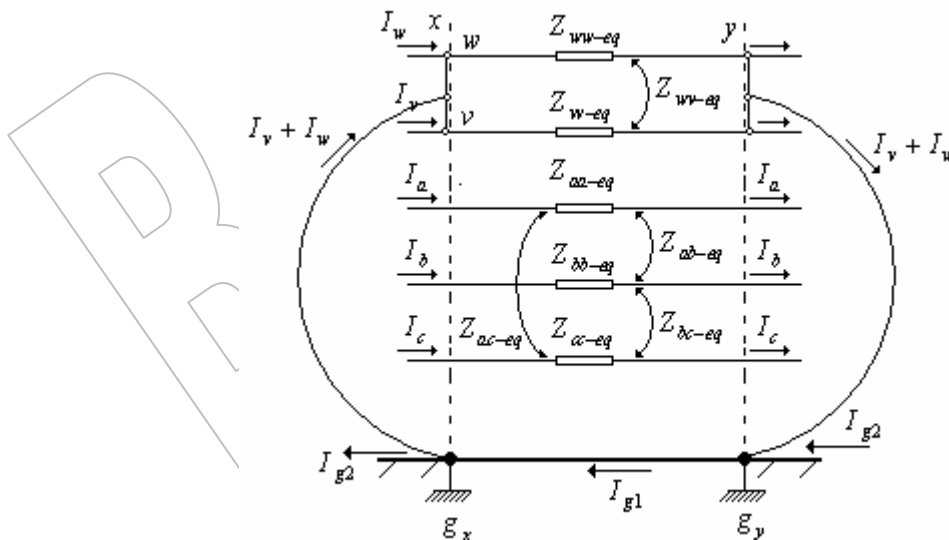


Figura 4.22. Circuito Equivalente considerando el Efecto Tierra

Ahora se procede a expresar las ecuaciones de caída de tensión del circuito;

$$\begin{bmatrix} \Delta V_a \\ \Delta V_b \\ \Delta V_c \\ \Delta V_v \\ \Delta V_w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{aag} & Z_{abg} & Z_{acg} & Z_{avg} & Z_{awg} \\ Z_{bag} & Z_{bbg} & Z_{bcg} & Z_{bvg} & Z_{bwg} \\ Z_{cag} & Z_{cbg} & Z_{ccg} & Z_{cvg} & Z_{cwg} \\ Z_{vag} & Z_{vbg} & Z_{vcg} & Z_{vvg} & Z_{vwg} \\ Z_{wag} & Z_{wbg} & Z_{wcg} & Z_{wvg} & Z_{wwg} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_a \\ I_b \\ I_c \\ I_v \\ I_w \end{bmatrix} \quad (4.88)$$

Cada uno de los elementos de la ecuación (4.88) sea de tensión, corriente o impedancia está expresado en fasores

En forma de submatrices,

$$\begin{bmatrix} \Delta V_\phi \\ \Delta V_T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{\phi\phi} & Z_{\phi T} \\ Z_{T\phi} & Z_{TT} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_\phi \\ I_T \end{bmatrix} \quad (4.89)$$

Donde; ϕ : Conductores de Fases.

T : Conductores de Tierra (Cables de Guarda).

ΔV_ϕ es el vector de tensiones de las fases de orden 3x1.

ΔV_T es el vector de tensión de los cables de guarda de orden 2x1.

I_ϕ es el vector de corriente de las fases de orden 3x1.

I_T es el vector de corriente de los cables de guarda de orden 2x1.

$Z_{\phi\phi}$ es la submatriz de impedancias de las fases de orden 3x3.

$Z_{\phi T}$ es la submatriz de impedancias fase-cable de guarda de orden 3x2.

$Z_{T\phi}$ es la submatriz transpuesta de $Z_{\phi T}$.

Z_{TT} es la submatriz de impedancias de cables de guarda de orden 2x2.

Pero como los cables de guarda están conectados a tierra, la tensión de los mismos se asumirá cero, cumpliéndose que;

$$\begin{aligned} \Delta V_u = 0 \\ \Delta V_w = 0 \end{aligned} \Rightarrow \Delta V_T = 0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{4.90}$$

$$\begin{bmatrix} \Delta V_\phi \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{\phi\phi} & Z_{\phi T} \\ Z_{T\phi} & Z_{TT} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_\phi \\ I_T \end{bmatrix} \tag{4.91}$$

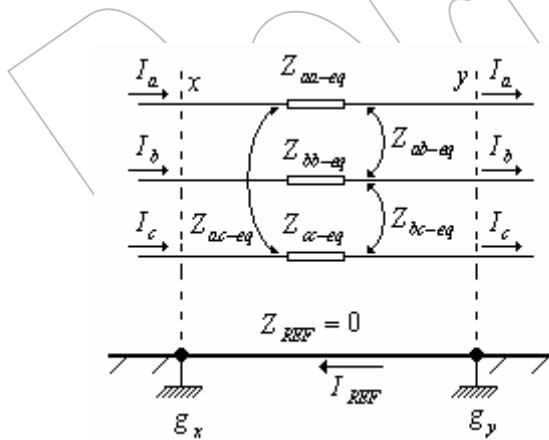
Efectuando una reducción de Kron;

$$\Delta V_\phi = Z'_{\phi\phi} \cdot I_\phi \tag{4.92}$$

$$Z'_{\phi\phi} = Z_{\phi\phi} - Z_{\phi T} \cdot (Z_{TT})^{-1} \cdot Z_{T\phi} = Z_{eq} \tag{4.93}$$

Donde la $Z'_{\phi\phi}$ es la matriz equivalente reducida por el método de kron.

De (4.92) se obtiene el circuito equivalente eliminando la representación los cables de guarda.



El Efecto de los cables de guarda, al igual que el de la tierra se encuentra incluido en $Z_{\phi\phi}$.

Figura 4.23. Circuito equivalente sin cable de guarda.

4.1.6.1 Consideraciones en Cuanto a la Corriente de Retorno

En el Circuito real de fase de la figura 4.21(a) tomando un a sección intermedia cualquiera entre “x” e “y” se tendrá que;

$$I_v + I_w + I_a + I_b + I_c = I_{g1} \quad (4.94)$$

O sea, que la corriente por tierra debe ser igual a la suma de las corrientes de todos y cada uno de los conductores. Esto puede verse también en el circuito equivalente de la figura 4.22, en el que sólo se ha eliminado la tierra.

Para una sección a la izquierda de “x” o la derecha de “y”, antes del punto de conexión de los cables de guarda a tierra, la corriente por tierra será;

$$I_{g2} = I_a + I_b + I_c \quad (4.95)$$

En el circuito equivalente final representado en la figura 4.23, que resulta después de haber eliminado los cables de guarda, la corriente por el camino de retorno (referencia) será I_{g2} y no I_{g1} , o sea no será la verdadera por tierra entre las secciones “x” e “y”.

4.1.6.2 Corriente de los Cables de Guarda

Conocidas las corriente en los conductores de fase, $I_\varphi = \begin{bmatrix} \bar{I}_a \\ \bar{I}_b \\ \bar{I}_c \end{bmatrix}$; las corrientes en

los conductores de guarda se puede determinar de (4.91),

$$0 = Z_{\varphi T} I_\varphi + Z_{TT} I_T \Rightarrow I_T = Z_{\varphi T} \cdot I_\varphi \cdot Z_{TT}^{-1} \quad (4.96)$$

$$I_T = \begin{bmatrix} I_v \\ I_w \end{bmatrix} \quad (4.97)$$

El resultado es general cualquiera que sea el número de cables de guarda.

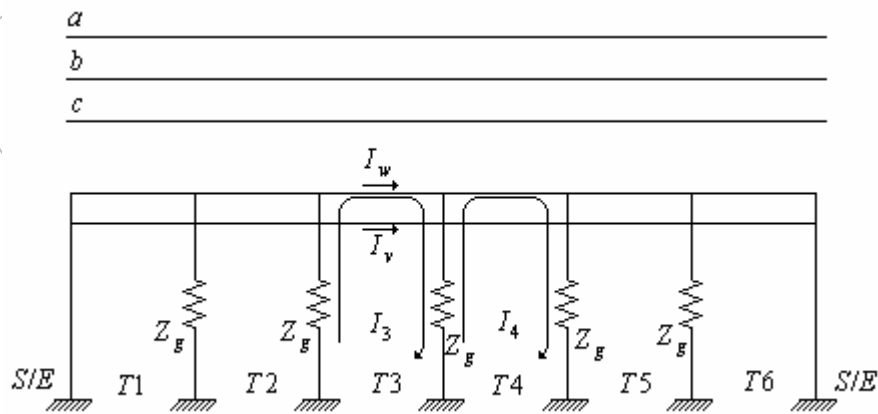
4.1.6.3 Corriente por Tierra

Del circuito real de fase de la figura 4.21(a) puede verse que de la corriente que circula por tierra entre las secciones “x” e “y” será;

$$I_{g1} = (I_a + I_b + I_c) + (I_v + I_w) \quad (4.98)$$

Obtenida I_T de (4.97) se tendrá I_v e I_w y se podrá determinar I_{g1} . Obsérvese de (4.96) que I_v e I_w serán negativas, o sea, que tendrán sentido contrario al asumido. Esto es lógico ya que el camino de retorno de las corrientes de fase será ahora por la tierra en paralelo con los cables de guarda => menos corriente pasará por la tierra => menor será el efecto de la resistividad de la tierra.

4.1.6.4 Efecto de la Conexión de los Cables de Guarda a las Torres



Z_g = Impedancia de Aterramiento de la Torre.

Figura 4.24. Representación circuital de una línea de transmisión.

Asumiendo que la separación entre torres es aproximadamente la misma y si no se considera el efecto de las condiciones terminales (en las subestaciones), cada una de las secciones T_2 , T_3 , etc; serían idénticas a las demás. En estas condiciones, por simetría, las corrientes en las mallas (por ejemplo I_3 e I_4) serían iguales. La corriente neta entre por la torre entre las secciones T_3 y T_4 sería $I_3 - I_4 = 0$. O sea, que no pasaría corrientes por las torres y sería equivalente a que los cables de guarda no estuviesen conectados a las torres.

En la realidad debido a la asimetría introducida por las condiciones terminales, lo anterior no sería absolutamente cierto; sin embargo, con la excepción de las torres cercanas a las subestaciones la condiciones anteriores seguirán siendo muy aproximadamente ciertas.

Bottradio

4.1.7 Línea de un Solo Circuito con un Cable de Guarda y dos Conductores por Fase.

Supóngase ahora que se tiene un circuito trifásico conformado por dos conductores por fase y un cable de guarda, se desea determinar como en los casos anteriores las impedancias propias y mutuas correspondientes a cada una de las fases del circuito e incluyendo en las impedancias el efecto del cable de guarda.

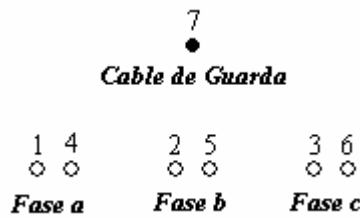


Figura 4.25. Circuito de dos conductores por fase y un cable de guarda.

Ecuación de las caídas de tensión,

$$\begin{bmatrix} \Delta V_1 \\ \Delta V_2 \\ \Delta V_3 \\ \Delta V_4 \\ \Delta V_5 \\ \Delta V_6 \\ \Delta V_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{11g} & Z_{12g} & Z_{13g} & Z_{14g} & Z_{15g} & Z_{16g} & Z_{17g} \\ Z_{21g} & Z_{22g} & Z_{23g} & Z_{24g} & Z_{25g} & Z_{26g} & Z_{27g} \\ Z_{31g} & Z_{32g} & Z_{33g} & Z_{34g} & Z_{35g} & Z_{36g} & Z_{37g} \\ Z_{41g} & Z_{42g} & Z_{43g} & Z_{44g} & Z_{45g} & Z_{46g} & Z_{47g} \\ Z_{51g} & Z_{52g} & Z_{53g} & Z_{54g} & Z_{55g} & Z_{56g} & Z_{57g} \\ Z_{61g} & Z_{62g} & Z_{63g} & Z_{64g} & Z_{65g} & Z_{66g} & Z_{67g} \\ Z_{71g} & Z_{72g} & Z_{73g} & Z_{74g} & Z_{75g} & Z_{76g} & Z_{77g} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \\ I_5 \\ I_6 \\ I_7 \end{bmatrix} \quad (4.99)$$

Cada elemento de tensión, corriente o impedancia está expresado en forma de fasor.

Expresando en forma de submatrices la matriz anterior (4.99), quedaría entonces;

$$\begin{bmatrix} \Delta V_M \\ \Delta V_N \\ \Delta V_T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{MM} & Z_{MN} & Z_{MT} \\ Z_{NM} & Z_{NN} & Z_{NT} \\ Z_{TM} & Z_{TN} & Z_{TT} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_M \\ I_N \\ I_T \end{bmatrix} \quad (4.100)$$

En donde se representan los respectivos vectores de tensión y corriente correspondientes a las fases de cada circuito y cables de guarda, y las submatrices de impedancia de los circuitos y los conductores de guarda.

4.1.7.1 Paso 1. Eliminación de los Cables de Guarda.

Como en el caso anterior, el cable de guarda se encuentra conectado a tierra en cada una de las torres de la línea, por lo tanto;

$$\Delta V_T = 0 \quad (4.101)$$

Sustituyendo (4.101) en (4.100) se tiene;

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} \Delta V_M \\ \Delta V_N \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{MM} & Z_{MN} & Z_{MT} \\ Z_{NM} & Z_{NN} & Z_{NT} \\ Z_{TM} & Z_{TN} & Z_{TT} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_M \\ I_N \\ I_T \end{bmatrix} \quad (4.102)$$

Mediante una Reducción por Kron se obtiene lo siguiente,

$$\begin{bmatrix} \Delta V_M \\ \Delta V_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z'_{MM} & Z'_{MN} \\ Z'_{NM} & Z'_{NN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_M \\ I_N \end{bmatrix} \quad (4.103)$$

Donde,

$$\begin{bmatrix} Z'_{MM} & Z'_{MN} \\ Z'_{NM} & Z'_{NN} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{MM} & Z_{MN} \\ Z_{NM} & Z_{NN} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} Z_{MT} \\ Z_{NT} \end{bmatrix} \cdot [Z_{TT}]^{-1} \cdot [Z_{TM} \quad Z_{TN}] \quad (4.104)$$

Es la matriz reducida de impedancia de los conductores por fase de los circuitos con los cables de guarda eliminados.

4.1.7.2 Paso 2. Conversión del Haz en un Conductor Equivalente.

Como en el caso anterior de un circuito con dos conductores por fase, debido a las condiciones terminales que se presentan por causa de que cada fase está conformada por dos conductores, las condiciones para las tensiones y corrientes de las fases son las siguientes;

$$\begin{aligned} [\Delta V_M] &= [\Delta V_N] = [\Delta V] \\ I_M + I_N &= I \end{aligned} \quad (4.105)$$

De (4.82) y (4.83) se sabe que,

$$[\Delta V] = [Z_{eq}] \cdot [I] \text{ y donde } [\Delta V] = \begin{bmatrix} \Delta V_a \\ \Delta V_b \\ \Delta V_c \end{bmatrix}, \quad [I] = \begin{bmatrix} I_a \\ I_b \\ I_c \end{bmatrix}, \text{ y}$$

$$Z_{eq} = Z'_{MM} - (Z'_{MN} - Z'_{MM})(Z'_{MM} + Z'_{NN} - Z'_{MN} - Z'_{NM})^{-1}(Z'_{NM} - Z'_{MM})$$

Ecuación del Circuito Equivalente,

$$\begin{bmatrix} \Delta V_a \\ \Delta V_b \\ \Delta V_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{aa-eq} & Z_{ab-eq} & Z_{ac-eq} \\ Z_{ba-eq} & Z_{bb-eq} & Z_{bc-eq} \\ Z_{ca-eq} & Z_{cb-eq} & Z_{cc-eq} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_a \\ I_b \\ I_c \end{bmatrix} \quad (4.106)$$

La Matriz Z_{eq} es simétrica que representa la matriz equivalente resultante.

4.1.8 Línea de dos Circuitos con dos Cable de Guarda y dos Conductores por Fase Considerando el Efecto Tierra.

A continuación se presenta un caso de dos circuitos con dos conductores por fase cada uno y dos cables de guarda, determinar el circuito equivalente de impedancias propias y mutuas de cada circuito sin cable de guarda.

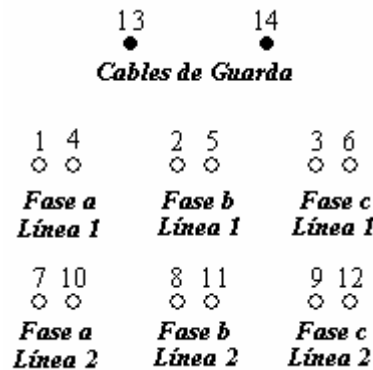


Figura 4.26. Dos circuitos, dos conductores por fase y dos cables de guarda.

La matriz primitiva de impedancias será una matriz de orden 14x14 y la relación de las variaciones de las caídas de tensión y corriente estará expresada en la ecuación (4.107),

Como en los casos anteriores la ecuación la matriz (4.107) se puede expresar en forma de submatrices como se indica a continuación,

$$\begin{bmatrix} \Delta V_M \\ \Delta V_N \\ \Delta V_P \\ \Delta V_Q \\ \Delta V_T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{MM} & Z_{MN} & Z_{MP} & Z_{MQ} & Z_{MT} \\ Z_{NM} & Z_{NN} & Z_{NP} & Z_{NQ} & Z_{NT} \\ Z_{PM} & Z_{PN} & Z_{PP} & Z_{PQ} & Z_{PT} \\ Z_{QM} & Z_{QN} & Z_{QP} & Z_{QQ} & Z_{QT} \\ Z_{TM} & Z_{TN} & Z_{TP} & Z_{TQ} & Z_{TT} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_M \\ I_N \\ I_P \\ I_Q \\ I_T \end{bmatrix} \tag{4.108}$$

$$\begin{bmatrix} \Delta V_1 \\ \Delta V_2 \\ \Delta V_3 \\ \Delta V_4 \\ \Delta V_5 \\ \Delta V_6 \\ \Delta V_7 \\ \Delta V_8 \\ \Delta V_9 \\ \Delta V_{10} \\ \Delta V_{11} \\ \Delta V_{12} \\ \Delta V_{13} \\ \Delta V_{14} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} & Z_{13} & Z_{14} & Z_{15} & Z_{16} & Z_{17} & Z_{18} & Z_{19} & Z_{110} & Z_{111} & Z_{112} & Z_{113} & Z_{114} \\ Z_{21} & Z_{22} & Z_{23} & Z_{24} & Z_{25} & Z_{26} & Z_{27} & Z_{28} & Z_{29} & Z_{210} & Z_{211} & Z_{212} & Z_{213} & Z_{214} \\ Z_{31} & Z_{32} & Z_{33} & Z_{34} & Z_{35} & Z_{36} & Z_{37} & Z_{38} & Z_{39} & Z_{310} & Z_{311} & Z_{312} & Z_{313} & Z_{314} \\ Z_{41} & Z_{42} & Z_{43} & Z_{44} & Z_{45} & Z_{46} & Z_{47} & Z_{48} & Z_{49} & Z_{410} & Z_{411} & Z_{412} & Z_{413} & Z_{414} \\ Z_{51} & Z_{52} & Z_{53} & Z_{54} & Z_{55} & Z_{56} & Z_{57} & Z_{58} & Z_{59} & Z_{510} & Z_{511} & Z_{512} & Z_{513} & Z_{514} \\ Z_{61} & Z_{62} & Z_{63} & Z_{64} & Z_{65} & Z_{66} & Z_{67} & Z_{68} & Z_{69} & Z_{610} & Z_{611} & Z_{612} & Z_{613} & Z_{614} \\ Z_{71} & Z_{72} & Z_{73} & Z_{74} & Z_{75} & Z_{76} & Z_{77} & Z_{78} & Z_{79} & Z_{710} & Z_{711} & Z_{712} & Z_{713} & Z_{714} \\ Z_{81} & Z_{82} & Z_{83} & Z_{84} & Z_{85} & Z_{86} & Z_{87} & Z_{88} & Z_{89} & Z_{810} & Z_{811} & Z_{812} & Z_{813} & Z_{814} \\ Z_{91} & Z_{92} & Z_{93} & Z_{94} & Z_{95} & Z_{96} & Z_{97} & Z_{98} & Z_{99} & Z_{910} & Z_{911} & Z_{912} & Z_{913} & Z_{914} \\ Z_{101} & Z_{102} & Z_{103} & Z_{104} & Z_{105} & Z_{106} & Z_{107} & Z_{108} & Z_{109} & Z_{1010} & Z_{1011} & Z_{1012} & Z_{1013} & Z_{1014} \\ Z_{111} & Z_{112} & Z_{113} & Z_{114} & Z_{115} & Z_{116} & Z_{117} & Z_{118} & Z_{119} & Z_{1110} & Z_{1111} & Z_{1112} & Z_{1113} & Z_{1114} \\ Z_{121} & Z_{122} & Z_{123} & Z_{124} & Z_{125} & Z_{126} & Z_{127} & Z_{128} & Z_{129} & Z_{1210} & Z_{1211} & Z_{1212} & Z_{1213} & Z_{1214} \\ Z_{131} & Z_{132} & Z_{133} & Z_{134} & Z_{135} & Z_{136} & Z_{137} & Z_{138} & Z_{139} & Z_{1310} & Z_{1311} & Z_{1312} & Z_{1313} & Z_{1314} \\ Z_{141} & Z_{142} & Z_{143} & Z_{144} & Z_{145} & Z_{146} & Z_{147} & Z_{148} & Z_{149} & Z_{1410} & Z_{1411} & Z_{1412} & Z_{1413} & Z_{1414} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \\ I_5 \\ I_6 \\ I_7 \\ I_8 \\ I_9 \\ I_{10} \\ I_{11} \\ I_{12} \\ I_{13} \\ I_{14} \end{bmatrix} \quad (4.107)$$

Igual que en el caso anterior de un circuito pueden efectuarse las mismas reducciones y los elementos de tensión, corriente e impedancia están expresados en forma de fasores.

4.1.8.1 Paso 1. Eliminación de los Cables de Guarda.

$$\begin{aligned}
 & \Delta V_T = 0 \quad (4.109) \\
 \Rightarrow & \begin{bmatrix} \Delta V_M \\ \Delta V_N \\ \Delta V_P \\ \Delta V_Q \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{MM} & Z_{MN} & Z_{MP} & Z_{MQ} & Z_{MT} \\ Z_{NM} & Z_{NN} & Z_{NP} & Z_{NQ} & Z_{NT} \\ Z_{PM} & Z_{PN} & Z_{PP} & Z_{PQ} & Z_{PT} \\ Z_{QM} & Z_{QN} & Z_{QP} & Z_{QQ} & Z_{QT} \\ Z_{TM} & Z_{TN} & Z_{TP} & Z_{TQ} & Z_{TT} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_M \\ I_N \\ I_P \\ I_Q \\ I_T \end{bmatrix} \quad (4.110)
 \end{aligned}$$

Cada elemento de tensión o corriente de la ecuación (4.110) es un vector, las impedancias son submatrices. Mediante una reducción de Kron se obtiene lo siguiente,

$$\begin{bmatrix} \Delta V_M \\ \Delta V_N \\ \Delta V_P \\ \Delta V_Q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z'_{MM} & Z'_{MN} & Z'_{MP} & Z'_{MQ} \\ Z'_{NM} & Z'_{NN} & Z'_{NP} & Z'_{NQ} \\ Z'_{PM} & Z'_{PN} & Z'_{PP} & Z'_{PQ} \\ Z'_{QM} & Z'_{QN} & Z'_{QP} & Z'_{QQ} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_M \\ I_N \\ I_P \\ I_Q \end{bmatrix} \quad (4.111)$$

Son los vectores y submatrices de los circuitos resultantes después de eliminar los cables de guarda.

Donde,

$$\begin{bmatrix} Z'_{MM} & Z'_{MN} & Z'_{MP} & Z'_{MQ} \\ Z'_{NM} & Z'_{NN} & Z'_{NP} & Z'_{NQ} \\ Z'_{PM} & Z'_{PN} & Z'_{PP} & Z'_{PQ} \\ Z'_{QM} & Z'_{QN} & Z'_{QP} & Z'_{QQ} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{MM} & Z_{MN} & Z_{MP} & Z_{MQ} \\ Z_{NM} & Z_{NN} & Z_{NP} & Z_{NQ} \\ Z_{PM} & Z_{PN} & Z_{PP} & Z_{PQ} \\ Z_{QM} & Z_{QN} & Z_{QP} & Z_{QQ} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} Z_{MT} \\ Z_{NT} \\ Z_{PT} \\ Z_{QT} \end{bmatrix} [Z_{TT}]^{-1} \begin{bmatrix} Z_{TM} & Z_{TN} & Z_{TP} & Z_{TQ} \end{bmatrix} \quad (4.112)$$

4.1.8.2 Paso 2. Conversión de los haces de los circuitos en conductores equivalentes.

$$\begin{aligned} \Delta V_M &= \Delta V_N = \Delta V_{L1} \\ \Delta V_P &= \Delta V_Q = \Delta V_{L2} \end{aligned} \quad (4.113)$$

Sí además los dos circuitos están en paralelo, es decir si ambos circuitos poseen y operan a la misma tensión y parten de la misma subestación y llegan a la misma subestación, se tendrá entonces que; $\Delta V_{L1} = \Delta V_{L2}$.

Procediendo en forma similar que en (4.75) y (4.80), se tiene que;

$$\begin{bmatrix} \Delta V_M \\ \Delta V_N - \Delta V_M \\ \Delta V_P \\ \Delta V_Q - \Delta V_P \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta V_M \\ 0 \\ \Delta V_P \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.114)$$

$$\begin{bmatrix} \Delta V_M \\ 0 \\ \Delta V_P \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{MM} & Z_{MN} & Z_{MP} & Z_{MQ} \\ Z_{NM} - Z_{MM} & Z_{NN} - Z_{MN} & Z_{NP} - Z_{MP} & Z_{NQ} - Z_{MQ} \\ Z_{PM} & Z_{PN} & Z_{PP} & Z_{PQ} \\ Z_{QM} - Z_{PM} & Z_{QN} - Z_{PN} & Z_{QP} - Z_{PP} & Z_{QQ} - Z_{PQ} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_M \\ I_N \\ I_P \\ I_Q \end{bmatrix} \quad (4.115)$$

Se quiere ahora modificar (4.115) de modo que el vector corriente sea;

$$\begin{bmatrix} I_M + I_N \\ I_N \\ I_P + I_Q \\ I_Q \end{bmatrix} \text{ se procede de la siguiente forma,}$$

$$\Delta V_M = Z_{MM}I_M + Z_{MN}I_N + Z_{MP}I_P + Z_{MQ}I_Q \quad (4.116.A)$$

$$\Delta V_N = (Z_{NM} - Z_{MM})I_M + (Z_{NN} - Z_{MN})I_N + (Z_{NP} - Z_{MP})I_P + (Z_{NQ} - Z_{MQ})I_Q \quad (4.116.B)$$

$$\Delta V_P = Z_{PM}I_M + Z_{PN}I_N + Z_{PP}I_P + Z_{PQ}I_Q \quad (4.116.C)$$

$$\Delta V_Q = (Z_{QM} - Z_{PM})I_M + (Z_{QN} - Z_{PN})I_N + (Z_{QP} - Z_{PP})I_P + (Z_{QQ} - Z_{PQ})I_Q \quad (4.116.D)$$

A la ecuación (4.116.A) se le suma y resta a la vez (para no alterar la ecuación) del lado derecho de la igualdad el siguiente Factor, $(Z_{MM}I_N + Z_{MP}I_Q)$.

Entonces, se tiene que;

$$\Delta V_M = Z_{MM}I_M + Z_{MN}I_N + Z_{MP}I_P + Z_{MQ}I_Q + (Z_{MM}I_N + Z_{MP}I_Q) - (Z_{MM}I_N + Z_{MP}I_Q)$$

Realizando las operaciones correspondientes, queda;

$$\Delta V_M = Z_{MM}(I_M + I_N) + (Z_{MN} - Z_{MM})I_N + Z_{MP}(I_P + I_Q) + (Z_{MQ} - Z_{MP})I_Q \quad (4.117)$$

En la ecuación (4.116.B) se le suma y resta a la vez (para no alterar la ecuación) del lado derecho de la igualdad el siguiente Factor, $(Z_{NM} - Z_{MM})I_N + (Z_{NP} - Z_{MP})I_Q$.

En la ecuación (3.116.C) se le suma y resta a la vez (para no alterar la ecuación) del lado derecho de la igualdad el siguiente Factor, $(Z_{PM}I_N + Z_{PP}I_Q)$.

En la ecuación (3.116.D) se le suma y resta a la vez (para no alterar la ecuación) del lado derecho de la igualdad el siguiente Factor, $(Z_{QM} - Z_{PM})I_N + (Z_{QP} - Z_{PP})I_Q$.

Realizando las operaciones correspondientes en cada uno de las ecuaciones anteriores, se obtiene la siguiente matriz;

$$\begin{bmatrix} \Delta V_M \\ 0 \\ \Delta V_P \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{MM} & Z_{MN} - Z_{MM} & Z_{MP} & Z_{MQ} - Z_{MP} \\ Z_{NM} - Z_{MM} & Z_{NN} + Z_{MM} - Z_{MN} - Z_{NM} & Z_{NP} - Z_{MP} & Z_{NQ} + Z_{MP} - Z_{MQ} - Z_{NP} \\ Z_{PM} & Z_{PN} - Z_{PM} & Z_{PP} & Z_{PQ} - Z_{PP} \\ Z_{QM} - Z_{PM} & Z_{QN} + Z_{PM} - Z_{PN} - Z_{QM} & Z_{QP} - Z_{PP} & Z_{QQ} + Z_{PP} - Z_{PQ} - Z_{QP} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_M + I_N \\ I_N \\ I_P + I_Q \\ I_Q \end{bmatrix} \quad (4.118)$$

Ahora para poder aplicar una reducción de Kron y poder eliminar las partes inferiores de cada línea es necesario reordenar la matriz y en ese caso se haría de la siguiente manera.

4.1.8.3 Paso 3. Se mueve primero las columnas y quedaría;

$$\begin{bmatrix} \Delta V_M \\ \Delta V_P \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{MM} & Z_{MN} - Z_{MM} & Z_{MP} & Z_{MQ} - Z_{MP} \\ Z_{PM} & Z_{PN} - Z_{PM} & Z_{PP} & Z_{PQ} - Z_{PP} \\ Z_{NM} - Z_{MM} & Z_{NN} + Z_{MM} - Z_{MN} - Z_{NM} & Z_{NP} - Z_{MP} & Z_{NQ} + Z_{MP} - Z_{MQ} - Z_{NP} \\ Z_{QM} - Z_{PM} & Z_{QN} + Z_{PM} - Z_{PN} - Z_{QM} & Z_{QP} - Z_{PP} & Z_{QQ} + Z_{PP} - Z_{PQ} - Z_{QP} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_M + I_N \\ I_N \\ I_P + I_Q \\ I_Q \end{bmatrix} \quad (4.119)$$

4.1.8.4 Paso 4. Se mueve ahora las filas y quedaría;

$$\begin{bmatrix} \Delta V_M \\ \Delta V_P \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{MM} & Z_{MP} & Z_{MN} - Z_{MM} & Z_{MQ} - Z_{MP} \\ Z_{PM} & Z_{PP} & Z_{PN} - Z_{PM} & Z_{PQ} - Z_{PP} \\ \hline Z_{NM} - Z_{MM} & Z_{NP} - Z_{MP} & Z_{NN} + Z_{MM} - Z_{MN} - Z_{NM} & Z_{NQ} + Z_{MP} - Z_{MQ} - Z_{NP} \\ Z_{QM} - Z_{PM} & Z_{QP} - Z_{PP} & Z_{QN} + Z_{PM} - Z_{PN} - Z_{QM} & Z_{QQ} + Z_{PP} - Z_{PQ} - Z_{QP} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_M + I_Q \\ I_P + I_Q \\ I_N \\ I_Q \end{bmatrix} \quad (4.120)$$

Y con esta última matriz ahora sí se puede realizar la reducción de Kron, para obtener así la una matriz equivalente de dos líneas,

$$\begin{bmatrix} \Delta V_{L1} \\ \Delta V_{L2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{L1L1-eq} & Z_{L1L2-eq} \\ Z_{L2L1-eq} & Z_{L2L2-eq} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_{L1} \\ I_{L2} \end{bmatrix} \quad (4.121)$$

Donde;

$$\Delta V_{L1} = \begin{bmatrix} \Delta V_{a1} \\ \Delta V_{b1} \\ \Delta V_{c1} \end{bmatrix}; \quad I_{L1} = \begin{bmatrix} I_{a1} \\ I_{b1} \\ I_{c1} \end{bmatrix} \quad (4.122)$$

$$\Delta V_{L2} = \begin{bmatrix} \Delta V_{a2} \\ \Delta V_{b2} \\ \Delta V_{c2} \end{bmatrix}; \quad I_{L2} = \begin{bmatrix} I_{a2} \\ I_{b2} \\ I_{c2} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} Z_{L1L1-eq} & Z_{L1L2-eq} \\ Z_{L2L1-eq} & Z_{L2L2-eq} \end{bmatrix} = Z_{K1} - Z_{K2} \cdot (Z_{K3})^{-1} \cdot Z_{K4} \quad (4.123)$$

$$Z_{K1} = \begin{bmatrix} Z_{MM} & Z_{MP} \\ Z_{PM} & Z_{PP} \end{bmatrix} \quad (4.123.1)$$

$$Z_{K2} = \begin{bmatrix} Z_{MN} - Z_{MM} & Z_{MQ} - Z_{MP} \\ Z_{PN} - Z_{PM} & Z_{PQ} - Z_{PP} \end{bmatrix} \quad (4.123.2)$$

$$Z_{K3} = \begin{bmatrix} Z_{NN} + Z_{MM} - Z_{MN} - Z_{NM} & Z_{NQ} + Z_{MP} - Z_{MQ} - Z_{NP} \\ Z_{QN} + Z_{PM} - Z_{PN} - Z_{QM} & Z_{QQ} + Z_{PP} - Z_{PQ} - Z_{QP} \end{bmatrix} \quad (4.123.3)$$

$$Z_{K4} = \begin{bmatrix} Z_{NM} - Z_{MM} & Z_{NP} - Z_{MP} \\ Z_{QM} - Z_{PM} & Z_{QP} - Z_{PP} \end{bmatrix} \quad (4.123.4)$$

Como se puede observar la etapa más laboriosa es la conversión de los conductores de cada haz en un conductor equivalente.

Anteriormente se mencionó que los circuitos pueden estar en paralelo, y si eso es así, se tendría que las tensiones de las líneas serían iguales $\Rightarrow \Delta V_{L1} = \Delta V_{L2}$.

En este caso ¿Se desea mantener la identidad de la línea de cada circuito o no?, Depende del caso. Por ejemplo, si se presenta una falla en mitad de una de las ternas o simplemente si las tensiones de las líneas son diferentes, en estos casos hay que mantener la identidad de ambas líneas; pero si no se quiere mantener la identidad de las líneas la matriz resultante se podría reducir igual que en el caso de un haz de dos conductores.

4.1.9 Línea de un solo Circuitos sin Cable de Guarda y con “n” Conductores por Fase.

El siguiente caso presenta un circuito de “n” conductores por fase sin cables de guarda ya que como se ha visto en varios casos anteriores la eliminación de estos se realiza siempre de la misma forma y siempre va a quedar la cantidad de conductores que conforman el circuito, como se sabe se desea determinar el circuito equivalente de las impedancias propias y mutuas que conforman las fases del circuito.

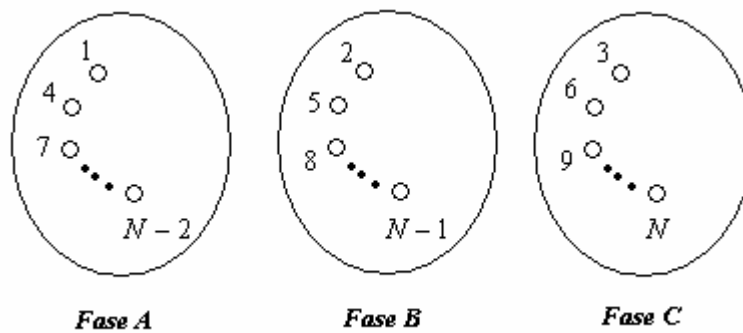


Figura 4.27. Circuito de “n” conductores por fase.

Las ecuaciones de las caídas de tensión quedan expresadas por la siguiente ecuación,

$$\begin{bmatrix} \Delta V_1 \\ \Delta V_2 \\ \Delta V_3 \\ \Delta V_4 \\ \Delta V_5 \\ \Delta V_6 \\ \vdots \\ \Delta V_{N-2} \\ \Delta V_{N-1} \\ \Delta V_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} & Z_{13} & Z_{14} & Z_{15} & Z_{16} & \cdots & Z_{1(N-2)} & Z_{1(N-1)} & Z_{1N} \\ Z_{21} & Z_{22} & Z_{23} & Z_{24} & Z_{25} & Z_{26} & \cdots & Z_{2(N-2)} & Z_{2(N-1)} & Z_{2N} \\ Z_{31} & Z_{32} & Z_{33} & Z_{34} & Z_{35} & Z_{36} & \cdots & Z_{3(N-2)} & Z_{3(N-1)} & Z_{3N} \\ Z_{41} & Z_{42} & Z_{43} & Z_{44} & Z_{45} & Z_{46} & \cdots & Z_{4(N-2)} & Z_{4(N-1)} & Z_{4N} \\ Z_{51} & Z_{52} & Z_{53} & Z_{54} & Z_{55} & Z_{56} & \cdots & Z_{5(N-2)} & Z_{5(N-1)} & Z_{5N} \\ Z_{61} & Z_{62} & Z_{63} & Z_{64} & Z_{65} & Z_{66} & \cdots & Z_{6(N-2)} & Z_{6(N-1)} & Z_{6N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ Z_{(N-2)1} & Z_{(N-2)2} & Z_{(N-2)3} & Z_{(N-2)4} & Z_{(N-2)5} & Z_{(N-2)6} & \cdots & Z_{(N-2)(N-2)} & Z_{(N-2)(N-1)} & Z_{(N-2)N} \\ Z_{(N-1)1} & Z_{(N-1)2} & Z_{(N-1)3} & Z_{(N-1)4} & Z_{(N-1)5} & Z_{(N-1)6} & \cdots & Z_{(N-1)(N-2)} & Z_{(N-1)(N-1)} & Z_{(N-1)N} \\ Z_{N1} & Z_{N2} & Z_{N3} & Z_{N4} & Z_{N5} & Z_{N6} & \cdots & Z_{N(N-2)} & Z_{N(N-1)} & Z_{NN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \\ I_5 \\ I_6 \\ \vdots \\ I_{N-2} \\ I_{N-1} \\ I_N \end{bmatrix} \tag{4.124}$$

Solo para ser empleado con objetivo de evaluación, o académicos. Prohibido la reproducción total o parcial de este documento sin consentimiento de los autores. Copyright © 2007.

Donde: “n”: El número de conductores que conforman una fase

“N”: Es el número total de conductores que conforman la línea.

$$\Rightarrow N = 3 \cdot \# \text{Conductores} / \text{Fase} \Rightarrow N = 3 \cdot n \quad (4.125)$$

Ahora se lleva la matriz (4.124) a la forma de submatrices,

$$\begin{bmatrix} \Delta V_{S1} \\ \Delta V_{S2} \\ \vdots \\ \Delta V_{Sn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{S11} & Z_{S12} & \cdots & Z_{S1n} \\ Z_{S21} & Z_{S22} & \cdots & Z_{S2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Z_{Sn1} & Z_{Sn2} & \cdots & Z_{Snn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{S1} \\ I_{S2} \\ \vdots \\ I_{Sn} \end{bmatrix} \quad (4.126)$$

Donde;

$$\Delta V_{S1} = \begin{bmatrix} \Delta V_1 \\ \Delta V_2 \\ \Delta V_3 \end{bmatrix}, \Delta V_{S2} = \begin{bmatrix} \Delta V_4 \\ \Delta V_5 \\ \Delta V_6 \end{bmatrix}, \dots, \Delta V_{Sn} = \begin{bmatrix} \Delta V_{N-2} \\ \Delta V_{N-1} \\ \Delta V_N \end{bmatrix} \quad (4.127)$$

$$Z_{S11} = \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} & Z_{13} \\ Z_{21} & Z_{22} & Z_{23} \\ Z_{31} & Z_{32} & Z_{33} \end{bmatrix}, Z_{S12} = \begin{bmatrix} Z_{14} & Z_{15} & Z_{16} \\ Z_{24} & Z_{25} & Z_{26} \\ Z_{34} & Z_{35} & Z_{36} \end{bmatrix}, \dots, \quad (4.128)$$

$$Z_{S1n} = \begin{bmatrix} Z_{1(N-2)} & Z_{1(N-1)} & Z_{1N} \\ Z_{2(N-2)} & Z_{2(N-1)} & Z_{2N} \\ Z_{3(N-2)} & Z_{3(N-1)} & Z_{3N} \end{bmatrix}, \dots, Z_{Snn} = \begin{bmatrix} Z_{(N-2)(N-2)} & Z_{(N-2)(N-1)} & Z_{(N-2)N} \\ Z_{(N-1)(N-2)} & Z_{(N-1)(N-1)} & Z_{(N-1)N} \\ Z_{N(N-2)} & Z_{N(N-1)} & Z_{NN} \end{bmatrix}$$

Todas las submatrices Z son del orden 3x3.

Por condiciones terminales para las caídas de tensión, se tiene que;

$$\Delta V_{S1} = \Delta V_{S2} = \dots = \Delta V_{Sn} \Rightarrow \begin{bmatrix} \Delta V_1 \\ \Delta V_2 \\ \Delta V_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta V_4 \\ \Delta V_5 \\ \Delta V_6 \end{bmatrix} = \dots = \begin{bmatrix} \Delta V_{N-2} \\ \Delta V_{N-1} \\ \Delta V_N \end{bmatrix} \quad (4.129)$$

Y por condiciones terminales para la corriente de cada fase, se tiene que;

$$\begin{aligned} I_1 + I_4 + I_7 + \dots + I_{N-2} &= I_a \\ I_2 + I_5 + I_8 + \dots + I_{N-1} &= I_b \\ I_3 + I_6 + I_9 + \dots + I_N &= I_c \end{aligned} \quad (4.130)$$

Como en las operaciones anteriores la idea es modificar (4.124) hasta obtener una relación de la forma;

$$\Delta V = Z_{eq} \cdot I \Rightarrow \begin{bmatrix} \Delta V_a \\ \Delta V_b \\ \Delta V_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{aa-eg} & Z_{ab-eg} & Z_{ac-eg} \\ Z_{ba-eg} & Z_{bb-eg} & Z_{bc-eg} \\ Z_{ca-eg} & Z_{cb-eg} & Z_{cc-eg} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_a \\ I_b \\ I_c \end{bmatrix} \quad (4.131)$$

Trabajando con (4.124) en forma de submatrices. Se resta la primera (1ra) fila a todas las demás, basados en (4.129) se tiene que;

$$\begin{bmatrix} \Delta V_{S1} \\ \Delta V_{S2} - \Delta V_{S1} \\ \vdots \\ \Delta V_{Sn} - \Delta V_{S1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta V \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.132)$$

Donde, $[\Delta V] = \begin{bmatrix} \Delta V_a \\ \Delta V_b \\ \Delta V_c \end{bmatrix}$ se tiene ahora;

$$\begin{bmatrix} \Delta V \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{S11} & Z_{S12} & \dots & Z_{S1n} \\ Z_{S21} - Z_{S11} & Z_{S22} - Z_{S12} & \dots & Z_{S2n} - Z_{S1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Z_{Sn1} - Z_{S11} & Z_{Sn2} - Z_{S12} & \dots & Z_{Snn} - Z_{S1n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{S1} \\ I_{S2} \\ \vdots \\ I_{Sn} \end{bmatrix} \quad (4.133)$$

Ahora se quiere modificar (4.133) de modo que el vector corriente sea;

$$\begin{bmatrix} I_{S1} + I_{S2} + \dots + I_{Sn} \\ I_{S2} \\ \vdots \\ I_{Sn} \end{bmatrix} \quad (4.134)$$

Se tiene las siguientes ecuaciones

$$\Delta V = Z_{S11}I_{S1} + Z_{S12}I_{S2} + \dots + Z_{S1n}I_{Sn} \quad (4.135.1)$$

$$0 = (Z_{S21}-Z_{S11})I_{S1} + (Z_{S22}-Z_{S12})I_{S2} + \dots + (Z_{S2n}-Z_{S1n})I_{Sn} \quad (4.135.2)$$

⋮
⋮

$$0 = (Z_{Sn1}-Z_{S11})I_{S1} + (Z_{Sn2}-Z_{S12})I_{S2} + \dots + (Z_{Snn}-Z_{S1n})I_{Sn} \quad (4.135.n)$$

Ahora se procede a modificar cada una de las ecuaciones para obtener el nuevo vector de corriente que se desea.

Ecuación 4.135.1 Se le suma y resta del lado derecho de la igualdad el siguiente factor; $Z_{S11}(I_{S2} + I_{S3} + \dots + I_{Sn})$

Se tiene entonces la siguiente ecuación,

$$\Delta V = Z_{S11}I_{S1} + Z_{S12}I_{S2} + \dots + Z_{S1n}I_{Sn} + Z_{S11}(I_{S2} + I_{S3} + \dots + I_{Sn}) - Z_{S11}(I_{S2} + I_{S3} + \dots + I_{Sn})$$

Realizando las operaciones matemáticas correspondientes quedaría entonces,

$$\Delta V = Z_{S11}(I_{S1} + I_{S2} + \dots + I_{Sn}) + (Z_{S12}-Z_{S11})I_{S2} + \dots + (Z_{S1n}-Z_{S11})I_{Sn} \quad (4.136.1)$$

Ahora hay que modificar cada una de las ecuaciones sucesivamente realizando el mismo procedimiento; lo único que va a cambiar es el factor que se suma y se resta en cada ecuación, este factor es la Impedancia que multiplica a la sumatoria de corrientes $(I_{S2} + I_{S3} + \dots + I_{Sn})$, esta impedancia es cambiada por la impedancia que

multiplica a la corriente I_{S1} en el conjunto de ecuaciones (4.135). Se continúa ahora operando con la ecuación (4.135.2).

Ecuación 4.135.1 En esta ecuación la impedancia que multiplica a la corriente I_{S1} es; $(Z_{S12} - Z_{S11})$ entonces el factor que se va a sumar y a restar del lado derecho de la igualdad sería; $(Z_{S12} - Z_{S11})(I_{S2} + I_{S3} + \dots + I_{Sn})$

Realizando las operaciones matemáticas correspondientes en la ecuación quedaría,

$$0 = (Z_{S21} - Z_{S11})(I_{S1} + I_{S2} + \dots + I_{Sn}) + (Z_{S22} + Z_{S11} - Z_{S12} - Z_{S21})I_{S2} + \dots + (Z_{S2n} + Z_{S11} - Z_{S1n} - Z_{S21})I_{Sn} \quad (4.136.2)$$

Ecuación 4.123.n Se le suma y resta del lado derecho de la igualdad el siguiente factor; $(Z_{Sn1} - Z_{S11})(I_{S2} + I_{S3} + \dots + I_{Sn})$

Realizando las operaciones matemáticas correspondientes en la ecuación quedaría,

$$0 = (Z_{Sn1} - Z_{S11})(I_{S1} + I_{S2} + \dots + I_{Sn}) + (Z_{Sn2} + Z_{S11} - Z_{S12} - Z_{Sn1})I_{S2} + \dots + (Z_{Snn} + Z_{S11} - Z_{S1n} - Z_{Sn1})I_{Sn} \quad (4.136.n)$$

Armando de nuevo la matriz modificada se tiene ahora,

$$\begin{bmatrix} \Delta V \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{S11} & Z_{S12} - Z_{S11} & \dots & Z_{S1n} - Z_{S11} \\ Z_{S21} - Z_{S11} & Z_{S22} + Z_{S11} - Z_{S12} - Z_{S21} & \dots & Z_{S2n} + Z_{S11} - Z_{S1n} - Z_{S21} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Z_{Sn1} - Z_{S11} & Z_{Sn2} + Z_{S11} - Z_{S12} - Z_{Sn1} & \dots & Z_{Snn} + Z_{S11} - Z_{S1n} - Z_{Sn1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{S1} + I_{S2} + \dots + I_{Sn} \\ I_{S2} \\ \vdots \\ I_{Sn} \end{bmatrix} \quad (4.137)$$

Ahora si se puede aplicar Kron a (4.137) para reducirla a la forma (4.131), se tiene entonces que;

$$Z_{eq} = Z_{K1} - Z_{K2} \cdot (Z_{K3})^{-1} \cdot Z_{K4} \quad (4.138)$$

Donde;

$$Z_{K1} = Z_{S11} \quad (4.139.1)$$

$$Z_{K2} = [Z_{S12} - Z_{11} \quad Z_{S13} - Z_{11} \quad \dots \quad Z_{S1n} - Z_{11}] \quad (4.139.2)$$

$$Z_{K3} = \begin{bmatrix} Z_{S21} - Z_{11} \\ Z_{S31} - Z_{11} \\ \vdots \\ Z_{Sn1} - Z_{11} \end{bmatrix} \quad (4.139.3)$$

$$Z_{K4} = \begin{bmatrix} Z_{S22} + Z_{11} - Z_{S12} - Z_{21} & Z_{S23} + Z_{11} - Z_{S13} - Z_{21} & \dots & Z_{S2n} + Z_{11} - Z_{S1n} - Z_{21} \\ Z_{S32} + Z_{11} - Z_{S12} - Z_{31} & Z_{S33} + Z_{11} - Z_{S13} - Z_{31} & \dots & Z_{S3n} + Z_{11} - Z_{S1n} - Z_{31} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Z_{Sn2} + Z_{11} - Z_{S12} - Z_{n1} & Z_{Sn3} + Z_{11} - Z_{S13} - Z_{n1} & \dots & Z_{Snn} + Z_{11} - Z_{S1n} - Z_{n1} \end{bmatrix} \quad (4.139.4)$$

4.1.10 Línea de dos Circuitos sin Cable de Guarda y cada Circuito Posee Distinta Cantidad de Conductores por Fase.

A continuación se presenta un caso de dos circuitos, donde un circuito posee “ n ” conductores por fase y el otro posee “ m ” conductores por fase, se desea determinar las impedancias propias y mutuas que representan a cada circuito.

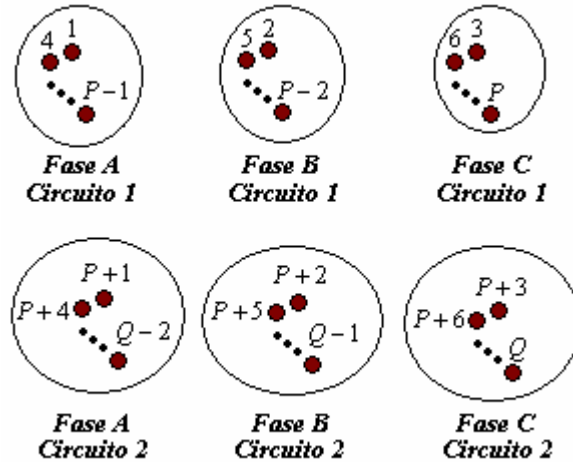


Figura 4.28. Un circuito con “ n ” y otro circuito con “ m ” conductores por fase.

Supóngase que se tiene una línea con dos circuito y cada circuito posee cantidades de conductores por fases diferentes.

El Circuito #1, Posee “ n ” conductores por fase.

El Circuito #2, Posee “ m ” conductores por fase.

Por otro lado se tiene que,

$$\begin{aligned}
 \Rightarrow P &= 3 \cdot n \\
 \Rightarrow Q - P &= 3 \cdot m \\
 \Rightarrow x &= n + m \\
 \Rightarrow Q &= 3 \cdot x
 \end{aligned}
 \tag{4.140}$$

Donde; P : Es el número total de conductores del circuito #1.

$Q - P$: Es el número total de conductores del circuito #2.

Q : Es el número total de conductores que conforman ambos circuitos.

En la ecuación matricial (4.141) se muestran las caídas de tensión de la línea con dos circuitos; relacionando esta última matriz con el dibujo de la figura 4.28, se puede observar que las ecuaciones del circuito #1 van desde ΔV_1 hasta la ecuación ΔV_p , y para el circuito #2 comienzan en ΔV_{p+1} hasta la ecuación ΔV_Q .

Ahora se presenta la matriz (4.141) en forma de submatrices,

$$\begin{bmatrix} \Delta V_{S1} \\ \Delta V_{S2} \\ \vdots \\ \Delta V_{Sn} \\ \Delta V_{S(n+1)} \\ \Delta V_{S(n+2)} \\ \vdots \\ \Delta V_{Sx} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{S11} & Z_{S12} & \cdots & Z_{S1n} & Z_{S1(n+1)} & Z_{S1(n+2)} & \cdots & Z_{S1x} \\ Z_{S21} & Z_{S22} & \cdots & Z_{S2n} & Z_{S2(n+1)} & Z_{S2(n+2)} & \cdots & Z_{S2x} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Z_{Sn1} & Z_{Sn2} & \cdots & Z_{Snn} & Z_{Sn(n+1)} & Z_{Sn(n+2)} & \cdots & Z_{Snx} \\ Z_{S(n+1)1} & Z_{S(n+1)2} & \cdots & Z_{S(n+1)n} & Z_{S(n+1)(n+1)} & Z_{S(n+1)(n+2)} & \cdots & Z_{S(n+1)x} \\ Z_{S(n+2)1} & Z_{S(n+2)2} & \cdots & Z_{S(n+2)n} & Z_{S(n+2)(n+1)} & Z_{S(n+2)(n+2)} & \cdots & Z_{S(n+2)x} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Z_{Sx1} & Z_{Sx2} & \cdots & Z_{Sxn} & Z_{Sx(n+1)} & Z_{Sx(n+2)} & \cdots & Z_{Sxx} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{S1} \\ I_{S2} \\ \vdots \\ I_{Sn} \\ I_{S(n+1)} \\ I_{S(n+2)} \\ \vdots \\ I_{Sx} \end{bmatrix} \quad (4.142)$$

$$\begin{bmatrix} \Delta V_1 \\ \Delta V_2 \\ \Delta V_3 \\ \Delta V_4 \\ \Delta V_5 \\ \Delta V_6 \\ \vdots \\ \Delta V_{P-2} \\ \Delta V_{P-1} \\ \Delta V_P \\ \Delta V_{P+1} \\ \Delta V_{P+2} \\ \Delta V_{P+3} \\ \Delta V_{P+4} \\ \Delta V_{P+5} \\ \Delta V_{P+6} \\ \vdots \\ \Delta V_{Q-2} \\ \Delta V_{Q-1} \\ \Delta V_Q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} & Z_{13} & Z_{14} & Z_{15} & Z_{16} & \cdots & Z_{1(P-2)} & Z_{1(P-1)} & Z_{1P} & Z_{1(P+1)} & Z_{1(P+2)} & Z_{1(P+3)} & Z_{1(P+4)} & Z_{1(P+5)} & Z_{1(P+6)} & \cdots & Z_{1(Q-2)} & Z_{1(Q-1)} & Z_{1Q} \\ Z_{21} & Z_{22} & Z_{23} & Z_{24} & Z_{25} & Z_{26} & \cdots & Z_{2(P-2)} & Z_{2(P-1)} & Z_{2P} & Z_{2(P+1)} & Z_{2(P+2)} & Z_{2(P+3)} & Z_{2(P+4)} & Z_{2(P+5)} & Z_{2(P+6)} & \cdots & Z_{2(Q-2)} & Z_{2(Q-1)} & Z_{2Q} \\ Z_{31} & Z_{32} & Z_{33} & Z_{34} & Z_{35} & Z_{36} & \cdots & Z_{3(P-2)} & Z_{3(P-1)} & Z_{3P} & Z_{3(P+1)} & Z_{3(P+2)} & Z_{3(P+3)} & Z_{3(P+4)} & Z_{3(P+5)} & Z_{3(P+6)} & \cdots & Z_{3(Q-2)} & Z_{3(Q-1)} & Z_{3Q} \\ Z_{41} & Z_{42} & Z_{43} & Z_{44} & Z_{45} & Z_{46} & \cdots & Z_{4(P-2)} & Z_{4(P-1)} & Z_{4P} & Z_{4(P+1)} & Z_{4(P+2)} & Z_{4(P+3)} & Z_{4(P+4)} & Z_{4(P+5)} & Z_{4(P+6)} & \cdots & Z_{4(Q-2)} & Z_{4(Q-1)} & Z_{4Q} \\ Z_{51} & Z_{52} & Z_{53} & Z_{54} & Z_{55} & Z_{56} & \cdots & Z_{5(P-2)} & Z_{5(P-1)} & Z_{5P} & Z_{5(P+1)} & Z_{5(P+2)} & Z_{5(P+3)} & Z_{5(P+4)} & Z_{5(P+5)} & Z_{5(P+6)} & \cdots & Z_{5(Q-2)} & Z_{5(Q-1)} & Z_{5Q} \\ Z_{61} & Z_{62} & Z_{63} & Z_{64} & Z_{65} & Z_{66} & \cdots & Z_{6(P-2)} & Z_{6(P-1)} & Z_{6P} & Z_{6(P+1)} & Z_{6(P+2)} & Z_{6(P+3)} & Z_{6(P+4)} & Z_{6(P+5)} & Z_{6(P+6)} & \cdots & Z_{6(Q-2)} & Z_{6(Q-1)} & Z_{6Q} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ Z_{(P-2)1} & Z_{(P-2)2} & Z_{(P-2)3} & Z_{(P-2)4} & Z_{(P-2)5} & Z_{(P-2)6} & \cdots & Z_{(P-2)(P-2)} & Z_{(P-2)(P-1)} & Z_{(P-2)P} & Z_{(P-2)(P+1)} & Z_{(P-2)(P+2)} & Z_{(P-2)(P+3)} & Z_{(P-2)(P+4)} & Z_{(P-2)(P+5)} & Z_{(P-2)(P+6)} & \cdots & Z_{(P-2)(Q-2)} & Z_{(P-2)(Q-1)} & Z_{(P-2)Q} \\ Z_{(P-1)1} & Z_{(P-1)2} & Z_{(P-1)3} & Z_{(P-1)4} & Z_{(P-1)5} & Z_{(P-1)6} & \cdots & Z_{(P-1)(P-2)} & Z_{(P-1)(P-1)} & Z_{(P-1)P} & Z_{(P-1)(P+1)} & Z_{(P-1)(P+2)} & Z_{(P-1)(P+3)} & Z_{(P-1)(P+4)} & Z_{(P-1)(P+5)} & Z_{(P-1)(P+6)} & \cdots & Z_{(P-1)(Q-2)} & Z_{(P-1)(Q-1)} & Z_{(P-1)Q} \\ Z_{P1} & Z_{P2} & Z_{P3} & Z_{P4} & Z_{P5} & Z_{P6} & \cdots & Z_{P(P-2)} & Z_{P(P-1)} & Z_{PP} & Z_{P(P+1)} & Z_{P(P+2)} & Z_{P(P+3)} & Z_{P(P+4)} & Z_{P(P+5)} & Z_{P(P+6)} & \cdots & Z_{P(Q-2)} & Z_{P(Q-1)} & Z_{PQ} \\ Z_{(P+1)1} & Z_{(P+1)2} & Z_{(P+1)3} & Z_{(P+1)4} & Z_{(P+1)5} & Z_{(P+1)6} & \cdots & Z_{(P+1)(P-2)} & Z_{(P+1)(P-1)} & Z_{(P+1)P} & Z_{(P+1)(P+1)} & Z_{(P+1)(P+2)} & Z_{(P+1)(P+3)} & Z_{(P+1)(P+4)} & Z_{(P+1)(P+5)} & Z_{(P+1)(P+6)} & \cdots & Z_{(P+1)(Q-2)} & Z_{(P+1)(Q-1)} & Z_{(P+1)Q} \\ Z_{(P+2)1} & Z_{(P+2)2} & Z_{(P+2)3} & Z_{(P+2)4} & Z_{(P+2)5} & Z_{(P+2)6} & \cdots & Z_{(P+2)(P-2)} & Z_{(P+2)(P-1)} & Z_{(P+2)P} & Z_{(P+2)(P+1)} & Z_{(P+2)(P+2)} & Z_{(P+2)(P+3)} & Z_{(P+2)(P+4)} & Z_{(P+2)(P+5)} & Z_{(P+2)(P+6)} & \cdots & Z_{(P+2)(Q-2)} & Z_{(P+2)(Q-1)} & Z_{(P+2)Q} \\ Z_{(P+3)1} & Z_{(P+3)2} & Z_{(P+3)3} & Z_{(P+3)4} & Z_{(P+3)5} & Z_{(P+3)6} & \cdots & Z_{(P+3)(P-2)} & Z_{(P+3)(P-1)} & Z_{(P+3)P} & Z_{(P+3)(P+1)} & Z_{(P+3)(P+2)} & Z_{(P+3)(P+3)} & Z_{(P+3)(P+4)} & Z_{(P+3)(P+5)} & Z_{(P+3)(P+6)} & \cdots & Z_{(P+3)(Q-2)} & Z_{(P+3)(Q-1)} & Z_{(P+3)Q} \\ Z_{(P+4)1} & Z_{(P+4)2} & Z_{(P+4)3} & Z_{(P+4)4} & Z_{(P+4)5} & Z_{(P+4)6} & \cdots & Z_{(P+4)(P-2)} & Z_{(P+4)(P-1)} & Z_{(P+4)P} & Z_{(P+4)(P+1)} & Z_{(P+4)(P+2)} & Z_{(P+4)(P+3)} & Z_{(P+4)(P+4)} & Z_{(P+4)(P+5)} & Z_{(P+4)(P+6)} & \cdots & Z_{(P+4)(Q-2)} & Z_{(P+4)(Q-1)} & Z_{(P+4)Q} \\ Z_{(P+5)1} & Z_{(P+5)2} & Z_{(P+5)3} & Z_{(P+5)4} & Z_{(P+5)5} & Z_{(P+5)6} & \cdots & Z_{(P+5)(P-2)} & Z_{(P+5)(P-1)} & Z_{(P+5)P} & Z_{(P+5)(P+1)} & Z_{(P+5)(P+2)} & Z_{(P+5)(P+3)} & Z_{(P+5)(P+4)} & Z_{(P+5)(P+5)} & Z_{(P+5)(P+6)} & \cdots & Z_{(P+5)(Q-2)} & Z_{(P+5)(Q-1)} & Z_{(P+5)Q} \\ Z_{(P+6)1} & Z_{(P+6)2} & Z_{(P+6)3} & Z_{(P+6)4} & Z_{(P+6)5} & Z_{(P+6)6} & \cdots & Z_{(P+6)(P-2)} & Z_{(P+6)(P-1)} & Z_{(P+6)P} & Z_{(P+6)(P+1)} & Z_{(P+6)(P+2)} & Z_{(P+6)(P+3)} & Z_{(P+6)(P+4)} & Z_{(P+6)(P+5)} & Z_{(P+6)(P+6)} & \cdots & Z_{(P+6)(Q-2)} & Z_{(P+6)(Q-1)} & Z_{(P+6)Q} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ Z_{(Q-2)1} & Z_{(Q-2)2} & Z_{(Q-2)3} & Z_{(Q-2)4} & Z_{(Q-2)5} & Z_{(Q-2)6} & \cdots & Z_{(Q-2)(P-2)} & Z_{(Q-2)(P-1)} & Z_{(Q-2)P} & Z_{(Q-2)(P+1)} & Z_{(Q-2)(P+2)} & Z_{(Q-2)(P+3)} & Z_{(Q-2)(P+4)} & Z_{(Q-2)(P+5)} & Z_{(Q-2)(P+6)} & \cdots & Z_{(Q-2)(Q-2)} & Z_{(Q-2)(Q-1)} & Z_{(Q-2)Q} \\ Z_{(Q-1)1} & Z_{(Q-1)2} & Z_{(Q-1)3} & Z_{(Q-1)4} & Z_{(Q-1)5} & Z_{(Q-1)6} & \cdots & Z_{(Q-1)(P-2)} & Z_{(Q-1)(P-1)} & Z_{(Q-1)P} & Z_{(Q-1)(P+1)} & Z_{(Q-1)(P+2)} & Z_{(Q-1)(P+3)} & Z_{(Q-1)(P+4)} & Z_{(Q-1)(P+5)} & Z_{(Q-1)(P+6)} & \cdots & Z_{(Q-1)(Q-2)} & Z_{(Q-1)(Q-1)} & Z_{(Q-1)Q} \\ Z_{Q1} & Z_{Q2} & Z_{Q3} & Z_{Q4} & Z_{Q5} & Z_{Q6} & \cdots & Z_{Q(P-2)} & Z_{Q(P-1)} & Z_{QP} & Z_{Q(P+1)} & Z_{Q(P+2)} & Z_{Q(P+3)} & Z_{Q(P+4)} & Z_{Q(P+5)} & Z_{Q(P+6)} & \cdots & Z_{Q(Q-2)} & Z_{Q(Q-1)} & Z_{QQ} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \\ I_5 \\ I_6 \\ \vdots \\ I_{(P-2)} \\ I_{(P-1)} \\ I_P \\ I_{(P+1)} \\ I_{(P+2)} \\ I_{(P+3)} \\ I_{(P+4)} \\ I_{(P+5)} \\ I_{(P+6)} \\ \vdots \\ I_{(Q-2)} \\ I_{(Q-1)} \\ I_Q \end{bmatrix}$$

(4.141)

Prohibido la reproducción total o parcial de este documento sin consentimiento de los autores. Copyright © 2007.

Donde;

$$\Delta V_{S1} = \begin{bmatrix} \Delta V_1 \\ \Delta V_2 \\ \Delta V_3 \end{bmatrix}, \Delta V_{S2} = \begin{bmatrix} \Delta V_4 \\ \Delta V_5 \\ \Delta V_6 \end{bmatrix}, \dots, \Delta V_{Sn} = \begin{bmatrix} \Delta V_{P-2} \\ \Delta V_{P-1} \\ \Delta V_P \end{bmatrix}, \dots, \Delta V_{Sx} = \begin{bmatrix} \Delta V_{Q-2} \\ \Delta V_{Q-1} \\ \Delta V_Q \end{bmatrix} \quad (4.143)$$

$$[Z_{S11}] = \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} & Z_{13} \\ Z_{21} & Z_{22} & Z_{23} \\ Z_{31} & Z_{32} & Z_{33} \end{bmatrix}, [Z_{S12}] = \begin{bmatrix} Z_{14} & Z_{15} & Z_{16} \\ Z_{24} & Z_{25} & Z_{26} \\ Z_{34} & Z_{35} & Z_{36} \end{bmatrix}, \dots, \quad (4.144)$$

$$[Z_{S1n}] = \begin{bmatrix} Z_{1(Q-2)} & Z_{1(Q-1)} & Z_{1Q} \\ Z_{2(Q-2)} & Z_{2(Q-1)} & Z_{2Q} \\ Z_{3(Q-2)} & Z_{3(Q-1)} & Z_{3Q} \end{bmatrix}, \dots, [Z_{Snn}] = \begin{bmatrix} Z_{(Q-2)(Q-2)} & Z_{(Q-2)(Q-1)} & Z_{(Q-2)Q} \\ Z_{(Q-1)(Q-2)} & Z_{(Q-1)(Q-1)} & Z_{(Q-1)Q} \\ Z_{Q(Q-2)} & Z_{Q(Q-1)} & Z_{QQ} \end{bmatrix}$$

Por condiciones terminales se tiene que,

$$\Delta V_{S1} = \Delta V_{S2} = \dots = \Delta V_{Sn} = \Delta V_{L1} = \begin{bmatrix} \Delta V_{A1} \\ \Delta V_{B1} \\ \Delta V_{C1} \end{bmatrix} \quad (4.145)$$

$$\Delta V_{S(n+1)} = \Delta V_{S(n+2)} = \dots = \Delta V_{Sx} = \Delta V_{L2} = \begin{bmatrix} \Delta V_{A2} \\ \Delta V_{B2} \\ \Delta V_{C2} \end{bmatrix}$$

Además

$$\begin{aligned} I_1 + I_4 + \dots + I_{P-2} &= I_{A1} & I_{P+1} + I_{P+4} + \dots + I_{Q-2} &= I_{A2} \\ I_2 + I_5 + \dots + I_{P-1} &= I_{B1} ; & I_{P+2} + I_{P+5} + \dots + I_{Q-1} &= I_{B2} \\ I_3 + I_6 + \dots + I_P &= I_{C1} & I_{P+3} + I_{P+6} + \dots + I_Q &= I_{C2} \end{aligned} \quad (4.146)$$

Como ya se sabe y se ha venido trabajando, la idea es modificar (4.141) hasta obtener una relación de la forma;

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \Delta V_{A1-eq} \\ \Delta V_{B1-eq} \\ \Delta V_{C1-eq} \\ \Delta V_{A2-eq} \\ \Delta V_{B2-eq} \\ \Delta V_{C2-eq} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} Z_{A1A1-eq} & Z_{A1B1-eq} & Z_{A1C1-eq} & Z_{A1A2-eq} & Z_{A1B2-eq} & Z_{A1C2-eq} \\ Z_{B1A1-eq} & Z_{B1B1-eq} & Z_{B1C1-eq} & Z_{B1A2-eq} & Z_{B1B2-eq} & Z_{B1C2-eq} \\ Z_{C1A1-eq} & Z_{C1B1-eq} & Z_{C1C1-eq} & Z_{C1A2-eq} & Z_{C1B2-eq} & Z_{C1C2-eq} \\ Z_{A2A1-eq} & Z_{A2B1-eq} & Z_{A2C1-eq} & Z_{A2A2-eq} & Z_{A2B2-eq} & Z_{A2C2-eq} \\ Z_{B2A1-eq} & Z_{B2B1-eq} & Z_{B2C1-eq} & Z_{B2A2-eq} & Z_{B2B2-eq} & Z_{B2C2-eq} \\ Z_{C2A1-eq} & Z_{C2B1-eq} & Z_{C2C1-eq} & Z_{C2A2-eq} & Z_{C2B2-eq} & Z_{C2C2-eq} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{A1-eq} \\ I_{B1-eq} \\ I_{C1-eq} \\ I_{A2-eq} \\ I_{B2-eq} \\ I_{C2-eq} \end{bmatrix} \\ \Rightarrow \begin{bmatrix} \Delta V_{L1} \\ \Delta V_{L2} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} Z_{L1L1} & Z_{L1L2} \\ Z_{L2L1} & Z_{L2L2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{L1} \\ I_{L2} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.147)$$

(Si los circuitos están en paralelo, las tensiones son iguales $\Delta V_{L1} = \Delta V_{L2}$, entonces podrá reducirse la matriz igual que en el caso de un haz de 2 conductores).

Trabajando con (4.141) en forma de submatrices. Primero se trabaja con el primer circuito restando la primera ecuación de tensión a las otras, empezando en la ΔV_{S_1} y terminando en la ecuación n-ésima ΔV_{S_n} ; luego, se toma la ecuación de tensión $\Delta V_{S_{(n+1)}}$ y se comienza a restarla a las otras, empezando en $\Delta V_{S_{(n+2)}}$ y terminando en ΔV_{S_x} ; como se muestra en la siguiente ecuación;

Solo para ser empleado con objetivo de evaluación, o académicos. Prohibida la reproducción total o parcial de este documento. Copyright © 2007.

$$\begin{bmatrix} \Delta V_{S1} \\ \Delta V_{S2} - \Delta V_{S1} \\ \vdots \\ \Delta V_{Sn} - \Delta V_{S1} \\ \Delta V_{S(n+1)} \\ \Delta V_{S(n+2)} - \Delta V_{S(n+1)} \\ \vdots \\ \Delta V_{Sx} - \Delta V_{S(n+1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta V_{L1} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \Delta V_{L2} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}; \quad \begin{matrix} \Delta V_{L1} = \begin{bmatrix} \Delta V_{A1} \\ \Delta V_{B1} \\ \Delta V_{C1} \end{bmatrix} \\ \Delta V_{L2} = \begin{bmatrix} \Delta V_{A2} \\ \Delta V_{B2} \\ \Delta V_{C2} \end{bmatrix} \end{matrix} \quad (4.148)$$

La matriz resultante es la mostrada en la ecuación (4.149),

Ahora se quiere modificar el vector corriente a la forma siguiente,

$$\begin{bmatrix} I_{S1} + I_{S2} + \dots + I_{Sn} \\ I_{S2} \\ \vdots \\ I_{Sn} \\ I_{S(n+1)} + I_{S(n+2)} + \dots + I_{Sx} \\ I_{S(n+2)} \\ \vdots \\ I_{Sx} \end{bmatrix} \quad (4.149)$$

$$\begin{bmatrix} \Delta V_{L1} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \Delta V_{L2} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{Z}_{S11} & \mathbf{Z}_{S12} & \cdots & \mathbf{Z}_{S1n} & \mathbf{Z}_{S1(n+1)} & \mathbf{Z}_{S1(n+2)} & \cdots & \mathbf{Z}_{S1x} \\ \mathbf{Z}_{S21} - \mathbf{Z}_{S11} & \mathbf{Z}_{S22} - \mathbf{Z}_{S12} & \cdots & \mathbf{Z}_{S2n} - \mathbf{Z}_{S1n} & \mathbf{Z}_{S2(n+1)} - \mathbf{Z}_{S1(n+1)} & \mathbf{Z}_{S2(n+2)} - \mathbf{Z}_{S1(n+2)} & \cdots & \mathbf{Z}_{S2x} - \mathbf{Z}_{S1x} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{Z}_{Sn1} - \mathbf{Z}_{S11} & \mathbf{Z}_{Sn2} - \mathbf{Z}_{S12} & \cdots & \mathbf{Z}_{Snn} - \mathbf{Z}_{S1n} & \mathbf{Z}_{Sn(n+1)} - \mathbf{Z}_{S1(n+1)} & \mathbf{Z}_{Sn(n+2)} - \mathbf{Z}_{S1(n+2)} & \cdots & \mathbf{Z}_{Snx} - \mathbf{Z}_{S1x} \\ \mathbf{Z}_{S(n+1)1} & \mathbf{Z}_{S(n+1)2} & \cdots & \mathbf{Z}_{S(n+1)n} & \mathbf{Z}_{S(n+1)(n+1)} & \mathbf{Z}_{S(n+1)(n+2)} & \cdots & \mathbf{Z}_{S(n+1)x} \\ \mathbf{Z}_{S(n+2)1} - \mathbf{Z}_{S(n+1)1} & \mathbf{Z}_{S(n+2)2} - \mathbf{Z}_{S(n+1)2} & \cdots & \mathbf{Z}_{S(n+2)n} - \mathbf{Z}_{S(n+1)n} & \mathbf{Z}_{S(n+2)(n+1)} - \mathbf{Z}_{S(n+1)(n+1)} & \mathbf{Z}_{S(n+2)(n+2)} - \mathbf{Z}_{S(n+1)(n+2)} & \cdots & \mathbf{Z}_{S(n+2)x} - \mathbf{Z}_{S(n+1)x} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{Z}_{Sx1} - \mathbf{Z}_{S(n+1)1} & \mathbf{Z}_{Sx2} - \mathbf{Z}_{S(n+1)2} & \cdots & \mathbf{Z}_{Sxn} - \mathbf{Z}_{S(n+1)n} & \mathbf{Z}_{Sx(n+1)} - \mathbf{Z}_{S(n+1)(n+1)} & \mathbf{Z}_{Sx(n+2)} - \mathbf{Z}_{S(n+1)(n+2)} & \cdots & \mathbf{Z}_{Sxx} - \mathbf{Z}_{S(n+1)x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{S1} \\ \mathbf{I}_{S2} \\ \vdots \\ \mathbf{I}_{Sn} \\ \mathbf{I}_{S(n+1)} \\ \mathbf{I}_{S(n+2)} \\ \vdots \\ \mathbf{I}_{Sx} \end{bmatrix} \tag{4.149}$$

de evaluación, o académicos. Prohibido la reproducción total o parcial de este documento sin consentimiento de los autores. Copyright © 2007.

Ahora se empieza a modificar cada una de las ecuaciones de tensión que conforman la matriz (4.149). Estas modificaciones se van a realizar en dos pasos ya que se tiene los circuitos.

1.10.1 Paso1. Modificando las ecuaciones del circuito #1.

Trabajando con ΔV_{S1} :

$$\Delta V_{S1} = Z_{S11}I_{S1} + Z_{S12}I_{S2} + \dots + Z_{S1n}I_{Sn} + Z_{S1(n+1)}I_{S(n+1)} + Z_{S1(n+2)}I_{S(n+2)} + \dots + Z_{S1x}I_{Sx} \quad (4.151)$$

Ahora se va a sumar y restar a la vez para no alterar la ecuación, del lado derecho de la igualdad por el factor;

$$Z_{S11}(I_{S2} + \dots + I_{Sn}) + Z_{S1(n+1)}(I_{S(n+2)} + \dots + I_{Sx})$$

Se tiene luego,

$$\Delta V_{S1} = Z_{S11}I_{S1} + Z_{S12}I_{S2} + \dots + Z_{S1n}I_{Sn} + Z_{S1(n+1)}I_{S(n+1)} + Z_{S1(n+2)}I_{S(n+2)} + \dots + Z_{S1x}I_{Sx} + Z_{S11}(I_{S2} + \dots + I_{Sn}) + Z_{S1n}(I_{S(n+2)} + \dots + I_{Sx}) - Z_{S11}(I_{S2} + \dots + I_{Sn}) - Z_{S1(n+1)}(I_{S(n+2)} + \dots + I_{Sx}) \quad (4.152)$$

Realizando las operaciones matemáticas respectivas queda;

$$\Delta V_{S1} = Z_{S11}(I_{S1} + I_{S2} + \dots + I_{Sn}) + (Z_{S12} - Z_{S11})I_{S2} + \dots + (Z_{S1n} - Z_{S11})I_{Sn} + Z_{S1(n+1)}(I_{S(n+1)} + I_{S(n+2)} + \dots + I_{Sx}) + (Z_{S1(n+2)} - Z_{S1(n+1)})I_{S(n+2)} + \dots + (Z_{S1x} - Z_{S1(n+1)})I_{Sx} \quad (4.153)$$

Trabajando con $\Delta V_{S2} - \Delta V_{S1} = 0$:

$$\Delta V_{S2} - \Delta V_{S1} = (Z_{S21} - Z_{S11})I_{S1} + (Z_{S22} - Z_{S12})I_{S2} + \dots + (Z_{S2n} - Z_{S1n})I_{Sn} + (Z_{S2(n+1)} - Z_{S1(n+1)})I_{S(n+1)} + (Z_{S2(n+2)} - Z_{S1(n+2)})I_{S(n+2)} + \dots + (Z_{S2x} - Z_{S1x})I_{Sx} \quad (4.14)$$

Al igual que antes se va a sumar y restar a la vez para no alterar la ecuación, del lado derecho de la igualdad por el siguiente factor;

$$(Z_{S21} - Z_{S11})(I_{S2} + \dots + I_{Sn}) + (Z_{S2(n+1)} - Z_{S1(n+1)})(I_{S(n+2)} + \dots + I_{Sx})$$

Luego de sumar y restar el factor anterior y realizar todas las operaciones matemáticas respectivas, queda;

$$\Delta V_{S2} - \Delta V_{S1} = (Z_{S21} - Z_{S11})(I_{S1} + I_{S2} + \dots + I_{Sn}) + (Z_{S22} + Z_{S11} - Z_{S12} - Z_{S21})I_{S2} + \dots + (Z_{S2n} + Z_{S11} - Z_{S1n} - Z_{S21})I_{Sn} + (Z_{S2(n+1)} - Z_{S1(n+1)})(I_{S(n+1)} + I_{S(n+2)} + \dots + I_{Sx}) + (Z_{S2(n+2)} + Z_{S1(n+1)} - Z_{S1(n+2)} - Z_{S2(n+1)})I_{S(n+2)} + \dots + (Z_{S2x} + Z_{S1(n+1)} - Z_{S1x} - Z_{S2(n+1)})I_{Sx} \quad (4.15)$$

Trabajando con $\Delta V_{Sn} - \Delta V_{S1} = 0$:

$$\Delta V_{Sn} - \Delta V_{S1} = (Z_{Sn1} - Z_{S11})I_{S1} + (Z_{Sn2} - Z_{S12})I_{S2} + \dots + (Z_{Snn} - Z_{S1n})I_{Sn} + (Z_{Sn(n+1)} - Z_{S1(n+1)})I_{S(n+1)} + (Z_{Sn(n+2)} - Z_{S1(n+2)})I_{S(n+2)} + \dots + (Z_{Snx} - Z_{S1x})I_{Sx} \quad (4.16)$$

Aquí el factor para modificar la ecuación es el siguiente;

$$(Z_{Sn1} - Z_{S11})(I_{S2} + \dots + I_{Sn}) + (Z_{Sn(n+1)} - Z_{S1(n+1)})(I_{S(n+2)} + \dots + I_{Sx})$$

Operando respectivamente la ecuación queda,

$$\begin{aligned} \Delta V_{S_n} - \Delta V_{S_1} = & (Z_{S_{n1}} - Z_{S_{11}})(I_{S_1} + I_{S_2} + \dots + I_{S_n}) + (Z_{S_{n2}} + Z_{S_{11}} - Z_{S_{12}} - Z_{S_{n1}})I_{S_2} + \dots \\ & + (Z_{S_{nn}} + Z_{S_{11}} - Z_{S_{1n}} - Z_{S_{n1}})I_{S_n} + (Z_{S_{n(n+1)}} - Z_{S_{1(n+1)}})(I_{S(n+1)} + I_{S(n+2)} + \dots + I_{S_x}) + \\ & (Z_{S_{n(n+2)}} + Z_{S_{1(n+1)}} - Z_{S_{1(n+2)}} - Z_{S_{n(n+1)}})I_{S(n+2)} + \dots + (Z_{S_{nx}} + Z_{S_{1(n+1)}} - Z_{S_{1x}} - Z_{S_{n(n+1)}})I_{S_x} \end{aligned} \quad (4.197)$$

1.10.2 Paso2. Modificando las ecuaciones del circuito #2.

Trabajando con $\Delta V_{S(n+1)}$:

$$\begin{aligned} \Delta V_{S(n+1)} = & Z_{S(n+1)1}I_{S_1} + Z_{S(n+1)2}I_{S_2} + \dots + Z_{S(n+1)n}I_{S_n} + Z_{S(n+1)(n+1)}I_{S(n+1)} + \\ & Z_{S(n+1)(n+2)}I_{S(n+2)} + \dots + Z_{S(n+1)x}I_{S_x} \end{aligned} \quad (4.198)$$

Ahora se va a sumar y restar a la vez para no alterar la ecuación, del lado derecho de la igualdad por el factor;

$$Z_{S(n+1)1}(I_{S_2} + \dots + I_{S_n}) + Z_{S(n+1)(n+1)}(I_{S(n+2)} + \dots + I_{S_x})$$

Se tiene luego,

$$\begin{aligned} \Delta V_{S(n+1)} = & Z_{S(n+1)1}I_{S_1} + Z_{S(n+1)2}I_{S_2} + \dots + Z_{S(n+1)n}I_{S_n} + Z_{S(n+1)(n+1)}I_{S(n+1)} + Z_{S(n+1)(n+2)}I_{S(n+2)} + \dots \\ & + Z_{S(n+1)x}I_{S_x} + Z_{S(n+1)1}(I_{S_2} + \dots + I_{S_n}) + Z_{S(n+1)(n+1)}(I_{S(n+2)} + \dots + I_{S_x}) - Z_{S(n+1)1}(I_{S_2} + \dots + I_{S_n}) - \\ & Z_{S(n+1)(n+1)}(I_{S(n+2)} + \dots + I_{S_x}) \end{aligned} \quad (4.199)$$

Realizando las operaciones matemáticas respectivas queda;

$$\begin{aligned} \Delta V_{S(n+1)} = & Z_{S(n+1)1}(I_{S_1} + I_{S_2} + \dots + I_{S_n}) + (Z_{S(n+1)2} - Z_{S(n+1)1})I_{S_2} + \dots + (Z_{S(n+1)n} - Z_{S(n+1)1})I_{S_n} + \\ & Z_{S(n+1)(n+1)}(I_{S(n+1)} + I_{S(n+2)} + \dots + I_{S_x}) + (Z_{S(n+1)(n+2)} - Z_{S(n+1)(n+1)})I_{S(n+2)} + \dots + (Z_{S(n+1)x} - Z_{S(n+1)(n+1)})I_{S_x} \end{aligned} \quad (4.200)$$

Trabajando con $\Delta V_{S(n+2)} - \Delta V_{S(n+1)} = 0$:

$$\Delta V_{S(n+2)} - \Delta V_{S(n+1)} = (Z_{S(n+2)1} - Z_{S(n+1)1})I_{S1} + (Z_{S(n+2)2} - Z_{S(n+1)2})I_{S2} + \dots + (Z_{S(n+2)n} - Z_{S(n+1)n})I_{Sn} + (Z_{S(n+2)(n+1)} - Z_{S(n+1)(n+1)})I_{S(n+1)} + (Z_{S(n+2)(n+2)} - Z_{S(n+1)(n+2)})I_{S(n+2)} + \dots + (Z_{S(n+2)x} - Z_{S(n+1)x})I_{Sx} \quad (4.191)$$

Al igual que antes se va a sumar y restar a la vez para no alterar la ecuación, del lado derecho de la igualdad por el siguiente factor;

$$(Z_{S(n+2)1} - Z_{S(n+1)1})(I_{S2} + \dots + I_{Sn}) + (Z_{S(n+2)(n+1)} - Z_{S(n+1)(n+1)})(I_{S(n+2)} + \dots + I_{Sx})$$

Luego de sumar y restar el factor anterior y realizar todas las operaciones matemáticas respectivas, queda que;

$$\Delta V_{S(n+2)} - \Delta V_{S(n+1)} = (Z_{S(n+2)1} - Z_{S(n+1)1})(I_{S1} + I_{S2} + \dots + I_{Sn}) + (Z_{S(n+2)2} + Z_{S(n+1)1} - Z_{S(n+1)2} - Z_{S(n+2)1})I_{S2} + \dots + (Z_{S(n+2)n} + Z_{S(n+1)1} - Z_{S(n+1)n} - Z_{S(n+2)1})I_{Sn} + (Z_{S(n+2)(n+1)} - Z_{S(n+1)(n+1)})(I_{S(n+1)} + I_{S(n+2)} + \dots + I_{Sx}) + (Z_{S(n+2)(n+2)} + Z_{S(n+1)(n+1)} - Z_{S(n+1)(n+2)} - Z_{S(n+2)(n+1)})I_{S(n+2)} + \dots + (Z_{S(n+2)x} + Z_{S(n+1)(n+1)} - Z_{S(n+1)x} - Z_{S(n+2)(n+1)})I_{Sx} \quad (4.192)$$

Trabajando con $\Delta V_{Sx} - \Delta V_{S(n+1)} = 0$:

$$\Delta V_{Sx} - \Delta V_{S(n+1)} = (Z_{Sx1} - Z_{S(n+1)1})I_{S1} + (Z_{Sx2} - Z_{S(n+1)2})I_{S2} + \dots + (Z_{Sxn} - Z_{S(n+1)n})I_{Sn} + (Z_{Sx(n+1)} - Z_{S(n+1)(n+1)})I_{S(n+1)} + (Z_{Sx(n+2)} - Z_{S(n+1)(n+2)})I_{S(n+2)} + \dots + (Z_{Sxx} - Z_{S(n+1)x})I_{Sx} \quad (4.193)$$

Aquí el factor para modificar la ecuación es el siguiente;

$$(Z_{Sx1} - Z_{S(n+1)1})(I_{S2} + \dots + I_{Sn}) + (Z_{Sx(n+1)} - Z_{S(n+1)(n+1)})(I_{S(n+2)} + \dots + I_{Sx})$$

Operando respectivamente la ecuación queda,

$$\begin{aligned} \Delta V_{Sx} - \Delta V_{S(n+1)} = & (Z_{Sx1} - Z_{S(n+1)1}) (I_{S1} + I_{S2} + \dots + I_{Sn}) + (Z_{Sx2} + Z_{S(n+1)1} - Z_{S12} - Z_{Sx1}) I_{S2} + \dots \\ & + (Z_{Sxn} + Z_{S(n+1)1} - Z_{S(n+1)n} - Z_{Sx1}) I_{Sn} + (Z_{Sx(n+1)} - Z_{S(n+1)(n+1)}) (I_{S(n+1)} + I_{S(n+2)} + \dots + I_{Sx}) + \\ & (Z_{Sx(n+2)} + Z_{S(n+1)(n+1)} - Z_{S(n+1)(n+2)} - Z_{Sx(n+1)}) I_{S(n+2)} + \dots + (Z_{Sxx} + Z_{S(n+1)(n+1)} - Z_{S(n+1)x} - Z_{Sx(n+1)}) I_{Sx} \end{aligned} \quad (4.14)$$

Después de haber modificado todas las ecuaciones, la matriz resultante es;

$$\begin{bmatrix} \Delta V_{I1} \\ \Delta V_{I2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{I1I1} & Z_{I1I2} \\ Z_{I2I1} & Z_{I2I2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{I1} \\ I_{I2} \end{bmatrix} \quad (4.15)$$

Donde;

$$\Delta V_{I1} = \begin{bmatrix} \Delta V_{S1} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta V_{S1} \\ \Delta V_{S2} - \Delta V_{S1} \\ \vdots \\ \Delta V_{Sn} - \Delta V_{S1} \end{bmatrix}; \quad \Delta V_{I2} = \begin{bmatrix} \Delta V_{S(n+1)} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta V_{S(n+1)} \\ \Delta V_{S(n+2)} - \Delta V_{S(n+1)} \\ \vdots \\ \Delta V_{Sx} - \Delta V_{S(n+1)} \end{bmatrix}$$

$$I_{I1} = \begin{bmatrix} I_{S1} + I_{S2} + \dots + I_{Sn} \\ I_{S2} \\ \vdots \\ I_{Sn} \end{bmatrix}; \quad I_{I2} = \begin{bmatrix} I_{S(n+1)} + I_{S(n+2)} + \dots + I_{Sx} \\ I_{S(n+2)} \\ \vdots \\ I_{Sx} \end{bmatrix}$$

$$Z_{I1I1} = \begin{bmatrix} Z_{S11} & Z_{S12} - Z_{S11} & \dots & Z_{S1n} - Z_{S11} \\ Z_{S21} - Z_{S11} & Z_{S22} + Z_{S11} - Z_{S12} - Z_{S21} & \dots & Z_{S2n} + Z_{S11} - Z_{S1n} - Z_{S21} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Z_{Sn1} - Z_{S11} & Z_{Sn2} + Z_{S11} - Z_{S12} - Z_{Sn1} & \dots & Z_{Snn} + Z_{S11} - Z_{S1n} - Z_{Sn1} \end{bmatrix}$$

$$Z_{I1I2} = \begin{bmatrix} Z_{S1(n+1)} & Z_{S1(n+2)} - Z_{S1(n+1)} & \cdots & Z_{S1x} - Z_{S1(n+1)} \\ Z_{S2(n+1)} - Z_{S1(n+1)} & Z_{S2(n+2)} + Z_{S1(n+1)} - Z_{S1(n+2)} - Z_{S2(n+1)} & \cdots & Z_{S2x} + Z_{S1(n+1)} - Z_{S1(n+2)} - Z_{S2(n+1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Z_{Sn(n+1)} - Z_{S1(n+1)} & Z_{Sn(n+2)} + Z_{S1(n+1)} - Z_{S1(n+2)} - Z_{Sn(n+1)} & \cdots & Z_{Snx} + Z_{S1(n+1)} - Z_{S1(n+2)} - Z_{Sn(n+1)} \end{bmatrix}$$

$$Z_{I2I1} = \begin{bmatrix} Z_{S(n+1)1} & Z_{S(n+1)2} - Z_{S(n+1)1} & \cdots & Z_{S(n+1)n} - Z_{S(n+1)1} \\ Z_{S(n+2)1} - Z_{S1(n+1)} & Z_{S(n+2)2} + Z_{S1(n+1)} - Z_{S(n+1)2} - Z_{S(n+2)1} & \cdots & Z_{S(n+2)n} + Z_{S1(n+1)} - Z_{S(n+1)2} - Z_{S(n+2)1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Z_{Sx1} - Z_{S1(n+1)} & Z_{Sx2} + Z_{S1(n+1)} - Z_{S(n+1)2} - Z_{Sx1} & \cdots & Z_{Sxn} + Z_{S1(n+1)} - Z_{S(n+1)2} - Z_{Sx1} \end{bmatrix}$$

$$Z_{I2I2} = \begin{bmatrix} Z_{S(n+1)(n+1)} & Z_{S(n+1)(n+2)} - Z_{S(n+1)(n+1)} & \cdots & Z_{S(n+1)x} - Z_{S(n+1)(n+1)} \\ Z_{S(n+2)(n+1)} - Z_{S(n+1)(n+1)} & Z_{S(n+2)(n+2)} + Z_{S(n+1)(n+1)} - Z_{S(n+1)(n+2)} - Z_{S(n+2)(n+1)} & \cdots & Z_{S(n+2)x} + Z_{S(n+1)(n+1)} - Z_{S(n+1)(n+2)} - Z_{S(n+2)(n+1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Z_{Sx(n+1)} - Z_{S(n+1)(n+1)} & Z_{Sx(n+2)} + Z_{S(n+1)(n+1)} - Z_{S(n+1)(n+2)} - Z_{Sx(n+1)} & \cdots & Z_{Sxx} + Z_{S(n+1)(n+1)} - Z_{S(n+1)(n+2)} - Z_{Sx(n+1)} \end{bmatrix}$$

Ahora para poder aplicar una reducción de Kron y poder eliminar las partes inferiores de cada línea es necesario reordenar la matriz y se hará de la misma forma que se hizo en el caso de la línea con dos circuitos y dos conductores por fase mostrado en la figura 4.26.

Al realizar la reordenación de la matriz esta queda,

$$\begin{bmatrix} \Delta V'_{I1} \\ \Delta V'_{I2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z'_{I1I1} & Z'_{I1I2} \\ Z'_{I2I1} & Z'_{I2I2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I'_{I1} \\ I'_{I2} \end{bmatrix} \quad (4.166)$$

Solo para ser empleado con objetivos de evaluación, o académicos. Prohibida la reproducción total o parcial de este documento sin consentimiento de los autores. Copyright © 2007

Donde;

$$\Delta V_{I1} = \begin{bmatrix} \Delta V_{S1} \\ \Delta V_{S(n+1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta V_{L1} \\ \Delta V_{L2} \end{bmatrix}; \quad \Delta V_{I2} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta V_{S2} - \Delta V_{S1} \\ \vdots \\ \Delta V_{Sn} - \Delta V_{S1} \\ \Delta V_{S(n+2)} - \Delta V_{S(n+1)} \\ \vdots \\ \Delta V_{Sx} - \Delta V_{S(n+1)} \end{bmatrix}$$

$$I_{I1} = \begin{bmatrix} I_{S1} + I_{S2} + \dots + I_{Sn} \\ I_{S(n+1)} + I_{S(n+2)} + \dots + I_{Sx} \end{bmatrix}; \quad I_{I2} = \begin{bmatrix} I_{S2} \\ \vdots \\ I_{Sn} \\ I_{S(n+2)} \\ \vdots \\ I_{Sx} \end{bmatrix};$$

$$Z_{I1I1} = \begin{bmatrix} Z_{S11} & Z_{S1(n+1)} \\ Z_{S(n+1)1} & Z_{S(n+1)(n+1)} \end{bmatrix};$$

$$Z_{I1I2} = \begin{bmatrix} Z_{S12} - Z_{S11} & \dots & Z_{S1n} - Z_{S11} & Z_{S1(n+2)} - Z_{S1(n+1)} & \dots & Z_{S1x} - Z_{S1(n+1)} \\ Z_{S(n+1)2} - Z_{S(n+1)1} & \dots & Z_{S(n+1)n} - Z_{S(n+1)1} & Z_{S(n+1)(n+2)} - Z_{S(n+1)(n+1)} & \dots & Z_{S(n+1)x} - Z_{S(n+1)(n+1)} \end{bmatrix}$$

$$Z_{I2I1} = \begin{bmatrix} Z_{S21} - Z_{S11} & Z_{S2(n+1)} - Z_{S1(n+1)} \\ \vdots & \vdots \\ Z_{Sn1} - Z_{S11} & Z_{Sn(n+1)} - Z_{S1(n+1)} \\ Z_{S(n+2)1} - Z_{S(n+1)1} & Z_{S(n+2)(n+1)} - Z_{S(n+1)(n+1)} \\ \vdots & \vdots \\ Z_{Sx1} - Z_{S(n+1)1} & Z_{Sx(n+1)} - Z_{S(n+1)(n+1)} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{Z}_{1212} = \begin{bmatrix}
 \mathbf{Z}_{S22} + \mathbf{Z}_{S11} - \mathbf{Z}_{S12} - \mathbf{Z}_{S21} & \cdots & \mathbf{Z}_{S2n} + \mathbf{Z}_{S11} - \mathbf{Z}_{S1n} - \mathbf{Z}_{S21} & \mathbf{Z}_{S2(n+2)} + \mathbf{Z}_{S1(n+1)} - \mathbf{Z}_{S1(n+2)} - \mathbf{Z}_{S2(n+1)} & \cdots & \mathbf{Z}_{S2x} + \mathbf{Z}_{S1(n+1)} - \mathbf{Z}_{S1x} - \mathbf{Z}_{S2(n+1)} \\
 \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
 \mathbf{Z}_{Sn2} + \mathbf{Z}_{S11} - \mathbf{Z}_{S12} - \mathbf{Z}_{Sn1} & \cdots & \mathbf{Z}_{Snn} + \mathbf{Z}_{S11} - \mathbf{Z}_{S1n} - \mathbf{Z}_{Sn1} & \mathbf{Z}_{Sn(n+2)} + \mathbf{Z}_{S1(n+1)} - \mathbf{Z}_{S1(n+2)} - \mathbf{Z}_{Sn(n+1)} & \cdots & \mathbf{Z}_{Snx} + \mathbf{Z}_{S1(n+1)} - \mathbf{Z}_{S1x} - \mathbf{Z}_{Sn(n+1)} \\
 \mathbf{Z}_{S(n+2)2} + \mathbf{Z}_{S(n+1)1} - \mathbf{Z}_{S(n+1)2} - \mathbf{Z}_{S(n+2)1} & \cdots & \mathbf{Z}_{S(n+2)n} + \mathbf{Z}_{S(n+1)1} - \mathbf{Z}_{S(n+1)n} - \mathbf{Z}_{S(n+2)1} & \mathbf{Z}_{S(n+2)(n+2)} + \mathbf{Z}_{S(n+1)(n+1)} - \mathbf{Z}_{S(n+1)(n+2)} - \mathbf{Z}_{S(n+2)(n+1)} & \cdots & \mathbf{Z}_{S(n+2)x} + \mathbf{Z}_{S(n+1)(n+1)} - \mathbf{Z}_{S(n+1)x} - \mathbf{Z}_{S(n+2)(n+1)} \\
 \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
 \mathbf{Z}_{Sx2} + \mathbf{Z}_{S(n+1)1} - \mathbf{Z}_{S(n+1)2} - \mathbf{Z}_{Sx1} & \cdots & \mathbf{Z}_{Sxn} + \mathbf{Z}_{S(n+1)1} - \mathbf{Z}_{S(n+1)n} - \mathbf{Z}_{Sx1} & \mathbf{Z}_{Sx(n+2)} + \mathbf{Z}_{S(n+1)(n+1)} - \mathbf{Z}_{S(n+1)(n+2)} - \mathbf{Z}_{Sx(n+1)} & \cdots & \mathbf{Z}_{Sxx} + \mathbf{Z}_{S(n+1)(n+1)} - \mathbf{Z}_{S(n+1)x} - \mathbf{Z}_{Sx(n+1)}
 \end{bmatrix}$$

Después de terminar de reordenar toda la matriz ahora sí se puede realizar la reducción de Kron, para obtener así la matriz equivalente de dos líneas y así obtener las impedancias equivalentes del ambos circuitos.

$$\begin{bmatrix} \Delta V_{L1} \\ \Delta V_{L2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{L1L1-eq} & Z_{L1L2-eq} \\ Z_{L2L1-eq} & Z_{L2L2-eq} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_{L1} \\ I_{L2} \end{bmatrix} \tag{4.167}$$

Donde;

$$\begin{bmatrix} \Delta V_{L1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta V_{A1-eq} \\ \Delta V_{B1-eq} \\ \Delta V_{C1-eq} \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} I_{L1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{A1-eq} \\ I_{B1-eq} \\ I_{C1-eq} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \Delta V_{L2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta V_{A2-eq} \\ \Delta V_{B2-eq} \\ \Delta V_{C2-eq} \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} I_{L2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{A2-eq} \\ I_{B2-eq} \\ I_{C2-eq} \end{bmatrix} \tag{4.168}$$

Prohibido la reproducción total o parcial de este documento sin consentimiento de los autores. Copyright © 2007.

$$\begin{bmatrix} Z_{L1L1-eq} & Z_{L1L2-eq} \\ Z_{L2L1-eq} & Z_{L2L2-eq} \end{bmatrix} = Z_{L1L1} - Z_{L1L2} \cdot (Z_{L2L2})^{-1} \cdot Z_{L2L1} \quad (4.18)$$

Como en el caso anterior aquí también las líneas pueden estar en paralelo, y si es así se tendría que las tensiones de las líneas serían iguales $\Rightarrow \Delta V_{L1} = \Delta V_{L2}$. Y si no se desea mantener la identidad se puede reducir igual que en el caso de un circuito de conductores por fase.

Bottrador