Capítulo 3

Sistema Por Unidad

3.1 Sistemas Por Unidad

Los grandes sistemas eléctricos de potencia, debido a los valores significativos de energía que manejan, obligan al uso de cantidades que poseen valores cuantitativos elevados en potencias de diez (MWatt, MVA, k, kmp, Etc.), que deben ser manejados a través de los cálculos, y sendas cantidades de potencias de diez son poco prácticas en el calculo, con la idea de reducir el tamaño de las cifras que se crea el *sistema por unidad*.

El valor por unidad de una magnitud cualquiera se define como la razón de su valor real a un valor particular denominado base, quedando expresado el valor por unidad como un decimal. El valor por ciento es igual a 100 veces el valor por unidad. Los métodos de cálculo que utilizan las magnitudes en por unidad o por ciento, son mucho más sencillos que usando los valores en magnitudes reales.

Sea una cierta **Variable,** su valor en por unidad (**Variable p.u ó Variable 0/1**) se defina como la relación entre el valor real de la **Variable** y un valor de referencia o base.

$$\text{Variable}(\text{por Unidad}) \equiv \frac{\text{Valor Real de la Variable}}{\text{Valor Base de la Variable}} \qquad (1)$$

Esta definición sumamente sencilla es una poderosa herramienta de cálculo que brinda un gran número de bondades; especialmente en el análisis de sistemas de potencia.

En los sistemas de potencia, los cálculos relacionados con los elementos del sistema son a menudo efectuados en la forma de por unidad es decir, todas las cantidades son expresadas como una fracción decimal de valores de base que son seleccionada apropiadamente.

En cierta forma, los valores de las cantidades tomadas como base son arbitrarios, pero deben mantenerse y respetarse las relaciones básicas que rigen las leyes de los circuitos eléctricos.

Cuando se selecciona una base, normalmente se toman como valores bases, los valores nominales de los generadores y de los transformadores. Si los valores nominales de los generadores y de los transformadores son diferentes, se toma como base a los valores nominales de voltaje y potencia aparente más repetidos.

3.2 Ventajas del Sistema Por Unidad

La utilización de las variables en el sistema por unidad, pese a su sencillez de concepto y s elegancia, permiten la obtención de una serie de ventajas en los cálculos eléctricos de sistemas de potencia:

1. Las impedancias de los generadores y transformadores varían en un estrecho margen sin que dependan del tamaño de los mismos, por lo cual permiten detectar errores de cálculo.
2. Se evita tener que referir las cantidades de un lado a otro de los transformadores.

3. Se evita el reconocer el tipo de conexión Δ ó Y en los transformadores.
4. Se evita el trabajo con cantidades muy grandes en potencias de diez.
5. Se selecciona convenientemente las bases en sistemas con varios transformadores, se puede ahorrar trabajo.
6. Se reduce el empleo de $\sqrt{3}$ en cálculos trifásicos.
7. Los fabricantes en general, especifican sus equipos, en por unidad de los valores que sacan.
8. El sistema por unidad se presta por lo sencillo para el cálculo mediante computadores.

3.3 Variables Eléctricas Básicas en el Sistema Por Unidad

Las redes eléctricas de los sistemas de potencia, usualmente requiere de seis variables, que están estrechamente relacionadas con la solución de la red.

Tabla 1. Variables de un Sistema Eléctrico

Cantidad	*Símbolo*	*Dimensión*
Corriente	$\bar{I}$	Amperes
Voltaje	$\bar{V}$	Voltios
Potencia	$\bar{S} = P + jQ$	Volt-Amperes
Impedancia	Z=R+jQ	Ohmios
Factor de Potencia	$F.P$, $\cos\phi$	Adimensional
Tiempo	t	Segundos

El tiempo es una variable que se omite cuando se hace uso de la representación fasorial y se pasa del dominio temporal al de la frecuencia. De las seis variables que se hacen presentes en una red, cuatro de ellas son función de dos básicas, de manera que al fijar estas dos variables las otras quedan determinadas (*Por ejemplo : si se conoce el voltaje y la corriente, se puede conocer la potencia o la impedancia, y lo opuesto también es cierto*).

Los valores por unidad para las cuatro variables básicas *V*, *I*, *Z* y *S*, pueden ser obtenidos quedan definidos por las ecuaciones (2) a la (5).

$$\bar{V}[p.u] = \frac{\bar{V}[Volt]}{V_{base}} \tag{2}$$

$$\bar{I}[p.u] = \frac{\bar{I}[Amp]}{I_{base}} \tag{3}$$

$$Z[p.u] = \frac{Z[\Omega]}{Z_{base}} \tag{4}$$

$$\bar{S}[p.u] = \frac{\bar{S}[Volt - Amp]}{S_{base}} \tag{5}$$

Para que el sistema por unidad pueda ser correctamente empleado en los sistemas eléctricos de potencia; deben satisfacer las identidades y leyes de circuitos eléctricos; a saber:

- Ley de Ohm.
- Identidades de Potencia.
- Leyes de Kirchoff.
- Identidades Trifásicas.

Ejemplo 3.1.

Suponga que se esta trabajando en el sistema de 400 kV (este voltaje corresponde al nominal U_n) en EDELCA, y tómese ese valor como base. Si una de las barras en la Subestación (S/E) Santa Teresa se tiene un voltaje de 390 kV en un instante dado. Determinar el valor de este voltaje en el sistema por unidad.

La base es un valor arbitrario, pero se toma el voltaje nominal del sistema de EDELCA (400 kV) como base para este problema.

$V_{base} = 400\ kV$ (línea-línea, rms)

Tomando en cuenta la definición de la variable voltaje en el sistema por unidad de (2) resulta:

$$V[p.u] = \frac{V[Volt]}{V_{base}}$$

$$V[p.u] = \frac{390kV}{400kV} = 0.975\,p.u$$

$$V[p.u] = 0.975\,p.u$$

El voltaje en la barra de alta de la Subestación Santa Teresa está 25% por debajo de su valor nominal. (Se recuerda que se admite un margen de tolerancia de más o menos 5%)

3.4 Ley de Ohm en el Sistema por Unidad

Antes de establecer en el sistema por unidad la aplicación de la ley de Ohm, resulta ventajoso revelar algunas propiedades elementales de la impedancia en el sistema por unidad. Parar ello, sea la impedancia por unidad Z[p.u] definida por (4).

$$Z[p.u] = \frac{Z[\Omega]}{Z_{base}} \tag{4}$$

Se conoce que en unidades reales la impedancia posee una pare resistiva (R) y una parte reactiva (X).

$$Z[\Omega] = R[\Omega] + jX[\Omega] \tag{6}$$

Al sustituir en (4) se tiene:

$$Z[p.u] = \frac{R[\Omega] + jX[\Omega]}{Z_{base}}$$

separando los términos del numerador, resulta:

$$Z[p.u] = \frac{R[\Omega]}{Z_{base}} + j\,\frac{X[\Omega]}{Z_{base}}$$

de modo que para que se satisfaga; que la impedancia por unidad posee parte real e imaginaria:

$$Z[p.u] = R[p.u] + jX[p.u] \tag{7}$$

Finalmente se obtiene:

$$R[p.u] = \frac{R[\Omega]}{Z_{base}} \qquad X[p.u] = \frac{X[\Omega]}{Z_{base}} \tag{8}$$

De lo antes expuesto, se concluye que la impedancia base es única, común tanto a la parte resistiva como a la reactiva.

Ahora bien, la Ley de Ohm establece que la diferencia de potencial (V) a través de un conductor es proporcional a la corriente a través del; siendo la constante de proporcionalidad, la resistencia eléctrica; de modo que operacionalmente en unidades reales, la Ley de Ohm queda expresada por:

$$\bar{V}[Volt] = Z[\Omega]\bar{I}[Amp] \tag{9}$$

por definición el voltaje, la corriente y la impedancia en el sistema por unidad son:

$$\bar{V}[p.u] = \frac{\bar{V}[Volt]}{V_{base}} \tag{2}$$

$$\bar{I}[p.u] = \frac{\bar{I}[Amp]}{I_{base}} \tag{3}$$

$$Z[p.u] = \frac{Z[\Omega]}{Z_{base}} \tag{4}$$

entonces, sustituyendo (2), (3), (4), en la Ley de Ohm (9).

$$\bar{V}[p.u]V_{base} = Z[p.u]Z_{base}\bar{I}[p.u]I_{base}$$

las cantidades por unidad cumplen con la Ley de Ohm:

$$\bar{V}[p.u] = Z[p.u.]\bar{I}[p.u.] \tag{10}$$

si :

$$Z_{base} = \frac{V_{base}}{I_{base}} \tag{11}$$

de lo anterior se desprende que las cantidades por unidad cumplen con la Ley de Ohm.

3.5 Identidades de Potencia

Se conoce que la potencia aparente eléctrica monofásica por definición es el producto del voltaje ($\bar{V}$) por la corriente ($\bar{I}$) conjugada.

La potencia aparente ($\bar{S}$) es un número complejo, que esta constituido una parte real que es la potencia activa (P), la cual realiza un trabajo útil y la parte imaginaria potencia reactiva (Q); quedando operacionalmente esto definido como:

$$\bar{S}[Volt - Amp] = \bar{V}[Volt]\bar{I}^*[Amp] \quad (12)$$

$$\bar{S}[Volt - Amp] = P[Watt] + jQ[Var] \quad (13)$$

Si se toma la definición de potencia aparente en por unidad (5).

$$\bar{S}[p.u] = \frac{\bar{S}[Volt - Amp]}{S_{base}} \quad (5)$$

y se sustituye (13)

$$\bar{S}[p.u] = \frac{P[Watt] + jQ[Var]}{S_{base}}$$

Si el numerador se separa en dos partes se tiene:

$$\bar{S}[p.u] = \frac{P[Watt]}{S_{base}} + j\frac{Q[Var]}{S_{base}}$$

Si se cumple que:

$$P[p.u] = \frac{P[Watt]}{S_{base}}$$
$$Q[p.u] = \frac{Q[Var]}{S_{base}} \quad (14)$$

Entonces los valores por unidad satisfacen:

$$\bar{S}[p.u] = P[p.u] + jQ[p.u] \quad (15)$$

Con esta demostración tan sencilla se demuestra que la base para potencia es única, y común para la potencia activa y reactiva.

Se conoce que la potencia de un sistema eléctrico viene dado por el producto de la tensión y la corriente. Así, que se cumple en variables reales que:

$$\bar{S}[Volt - Amp] = \bar{V}[Volt]\bar{I}^*[Amp] \quad (12)$$

en cantidades por unidad, atendiendo a las definiciones antes dadas:

$$\bar{V}[p.u] = \frac{\bar{V}[Volt]}{V_{base}} \quad (2)$$

$$\bar{I}[p.u] = \frac{\bar{I}[Amp]}{I_{base}} \quad (3)$$

$$\bar{S}[p.u] = \frac{\bar{S}[Volt - Amp]}{S_{base}} \quad (5)$$

entonces:

$$\bar{S}[p.u]S_{base} = \bar{V}[p.u]V_{base}\bar{I}^*[Amp]I_{base}$$

esta relación es válida cuando los valores por unidad cumplen con la ley de potencia, si las siguientes relaciones son utilizadas:

$$\bar{S}[p.u.] = \bar{V}[p.u.]\bar{I}^*[p.u.] \quad (16)$$

$$S_{base} = V_{base}I_{base} \quad (17)$$

De modo que la ecuación de potencia puede ser efectivamente empleada en el sistema por unidad, si las bases también la cumplen.

3.6 Leyes de Kirchoff aplicadas al Sistema Por Unidad

Las leyes de *Robert Gustav Kirchoff* son las que rigen el comportamiento de los circuitos eléctricos, además de que son la herramienta que permite el cálculo de las variables eléctricas. Estas leyes son dos: Ley de tensiones y Ley de Corriente; ambas se basan en el principio de conservación de la energía y de la carga.

La primera Ley de Kirchoff también conocida como ley de las corrientes, establece que la sumatoria algebraica de las intensidades de corriente en un nodo debe ser igual a cero, se debe verificar si las cantidades por unidad satisfacen esta ley. Suponga un nodo cualquiera *p*, donde entran *n* corrientes ($\bar{I}_{1p}, \bar{I}_{2p}, \bar{I}_{3p} \ldots, \bar{I}_{np}$) y salen *m* ($\bar{I}_{p1}, \bar{I}_{p2}, \bar{I}_{p3} \ldots, \bar{I}_{pm}$). Aplicando Kirchoff se tiene:

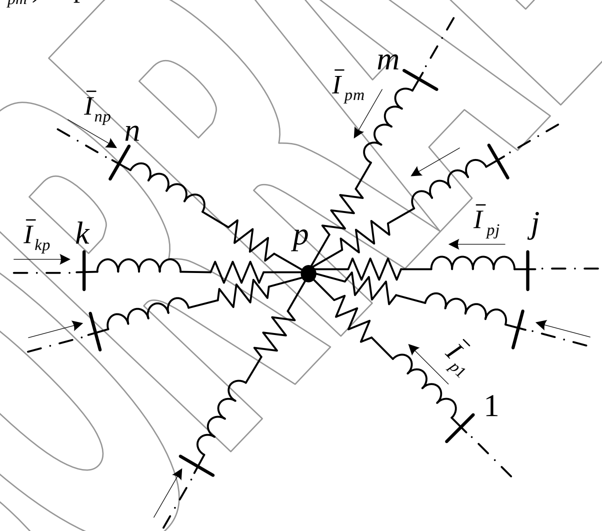


Fig. 3.1. Nodo genérico con *n*+*m* ramas

$$\sum_{i=1}^{n}\bar{I}_{ip}[Amp] = \sum_{j=1}^{m}\bar{I}_{pj}[Amp] \quad (14)$$

si se aplica la definición de sistema por unidad a ambos miembros se tiene:

$$\bar{I}_{ip}[p.u] = \frac{\bar{I}_{ip}[Amp]}{I_{basei}}$$

$$\bar{I}_{pj}[p.u] = \frac{\bar{I}_{pj}[Amp]}{I_{basej}}$$

Sustituyendo las definiciones anteriores con los respectivos despejes en (14) se tiene:

$$\sum_{i=1}^{n} \bar{I}_{ip}[p.u] I_{basei} = \sum_{j=1}^{m} \bar{I}_{pj}[p.u] I_{basej}$$

para que se cumpla la ley de corrientes de Kirchoff en el sistema por unidad.

$$\sum_{i=1}^{n} \bar{I}_{ip}[p.u] = \sum_{j=1}^{m} \bar{I}_{pj}[p.u] \tag{15}$$

se debe satisfacer:

$$I_{basei} = I_{basej} \tag{16}$$

Del razonamiento anterior se concluye que los valores por unidad de la corriente cumplen con la primera ley de Kirchoff, siempre y cuando las bases de las corrientes que entran y salgan sean iguales y únicas.

La segunda Ley de Kirchoff o ley de tensiones, establece que la sumatoria de las caídas de tensión alrededor de un lazo cerrado debe ser igual a la sumatoria de las elevaciones de tensión. Esto puede ser escrito como:

$$\sum_{j=1}^{n} \bar{E}[Volt] = \sum_{j=1}^{m} \bar{V}[Volt] \tag{17}$$

siendo $\bar{E}$ las caídas y $\bar{V}$ las elevaciones de voltaje. Si se aplica la definición de sistema por unidad a las elevaciones y a las caídas se tiene:

$$\bar{E}[p.u] = \frac{\bar{E}[Volt]}{E_{base}}$$

$$\bar{V}[p.u] = \frac{\bar{V}[Volt]}{V_{base}}$$

Si se toman estas definiciones con los respectivos despejes y se insertan en (12) se tiene:

$$\sum_{j=1}^{n} \bar{E}[\mathrm{p.u}] E_{base} = \sum_{j=1}^{m} \bar{V}[\mathrm{p.u}] V_{base}$$

Para que la ley de tensiones de Kirchoff cumpla con el sistema por unidad.

$$\sum_{j=1}^{n} \bar{E}[\mathrm{p.u}] = \sum_{j=1}^{m} \bar{V}[\mathrm{p.u}] \tag{18}$$

Se debe verificar que:

$$E_{base} = V_{base} \quad (19)$$

De manera que los valores de voltaje en por unidad cumplen con la segunda Ley de Kirchoff, cuando la base de tensión en un lazo cerrado es única.

3.7 Identidades Trifásicas

Los sistemas trifásicos también pueden ser estudiados en cantidades por unidad, de hecho, en esta área es donde se emplea generalmente ya que logra una gran cantidad de ventajas.

Todos los aspectos antes mencionados del sistema por unidad, son igualmente valederos en el caso en que se opere con sistemas trifásicos, solo que realizando dos salvedades:

- La voltaje base es siempre un voltaje de línea a línea (V_{L-L}, rms).
- La potencia aparente base debe tomarse siempre como potencia trifásica ($S_{3\phi}$).

$$V_{base} = V_{linea-linea} \quad (20)$$
$$S_{base} = S_{3\phi} \quad (21)$$

Todas las relaciones circuitales válidas en circuitos trifásicos equilibrados se respetan. Por tanto, para una V_{base} expresada en kV y una S_{base} expresada en MVA se tiene:

$$\bar{S}[MVA] = \sqrt{3}\bar{V}[kVolt]\bar{I}^*[kAmp] \quad (22)$$

Si se despejan de las definiciones de las variables tensión, corriente y potencia en por unidad.

$$\bar{V}[p.u] = \frac{\bar{V}[Volt]}{V_{base}} \quad (2)$$
$$\bar{I}[p.u] = \frac{\bar{I}[Amp]}{I_{base}} \quad (3)$$
$$\bar{S}[p.u] = \frac{\bar{S}[Volt-Amp]}{S_{base}} \quad (5)$$

y se sustituyen en (22), resulta:

$$\bar{S}[p.u]S_{base} = \sqrt{3}\bar{V}[p.u]V_{base}\bar{I}^*[kAmp]I^*_{base}$$

De modo que para que se mantenga el hecho de que la potencia en por unidad es el producto de la tensión y la corriente conjugada por unidad.

$$\bar{S}[p.u.] = \bar{V}[p.u.]\bar{I}^*[p.u] \quad (16)$$

Las bases deben satisfacer.

$$S_{base} = \sqrt{3}V_{base}I_{base} \quad (23)$$

Resulta fácilmente demostrable con el uso de la ecuación (11), dos ecuaciones de uso muy común.

$$I_{base}\left[kAmp\right]=\frac{S_{base}\left[MVA\right]}{\sqrt{3}V_{base}\left[kVolt\right]} \tag{24}$$

$$Z_{base}\left[\Omega\right]=\frac{\left|V_{base}\right|^{2}\left[kVolt\right]}{S_{base}^{*}\left[MVA\right]} \tag{25}$$

En especial la ecuación (25) es de uso muy común para determinar la impedancia base cuando se conocen las bases de tensión y potencia.

Uno de las potencialidades más altas que posee el sistema por unidad, es el empleo para los sistemas trifásicos

Las cargas trifásicas simétricas dentro de los sistemas de potencia pueden estar conectadas en estrella (Y) o en delta (Δ).

Considérese dos cargas trifásicas simétricas, una en estrella con impedancia $Z_Y = R_Y + jX_Y$, y otra conectada en delta $Z_\Delta = R_\Delta + jX_\Delta$.

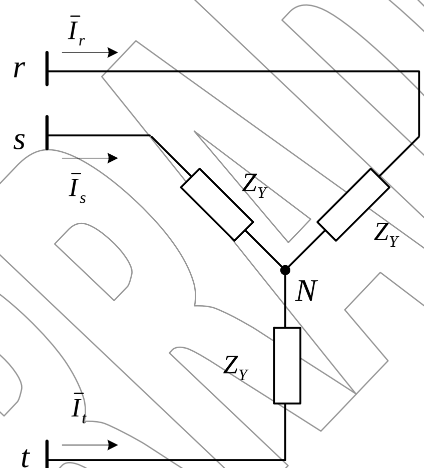


Fig. 3.2. Impedancias en Conexión Estrella

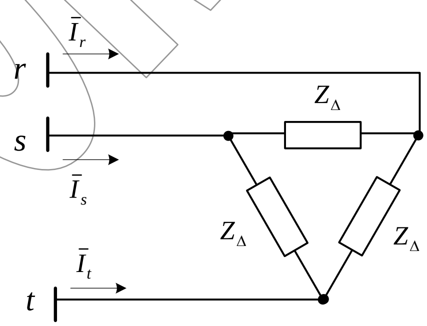


Fig. 3.3. Conexión Delta

Si se aplica le definición de sistema por unidad a las impedancias de ambas cargas trifásicas simétricas.

$$Z\left[p.u\right]=\frac{Z\left[\Omega\right]}{Z_{base}} \tag{4}$$

La impedancia de la carga conectada en estrella en el sistema por unidad queda dado por:

$$Z_Y[p.u] = \frac{Z_Y[\Omega]}{Z_{baseY}} \tag{26}$$

donde Z_{baseY} la impedancia base por fase de la carga conectada en estrella

$$Z_{baseY} = \frac{\left(V_{base}[línea - neutro]\right)^2}{S_{base1\phi}} = \frac{\left(\frac{V_{base}}{\sqrt{3}}\right)^2}{\frac{S_{base}}{3}}$$

$$Z_{baseY} = \frac{\frac{V_{base}^2}{3}}{\frac{S_{base}}{3}}$$

$$Z_{baseY} = \frac{V_{base}^2}{S_{base}} \tag{27}$$

En el caso de la carga simétrica en conexión delta, al aplicar la definición por unidad se tiene:

$$Z_\Delta[p.u] = \frac{Z_\Delta[\Omega]}{Z_{base\Delta}} \tag{28}$$

donde $Z_{base\Delta}$ en el caso que la carga este en delta.

$$Z_{base\Delta} = \frac{\left(V_{base}[línea - línea]\right)^2}{S_{base1\phi}} = \frac{\left(V_{base}\right)^2}{\frac{S_{base}}{3}}$$

$$Z_{base\Delta} = \frac{V_{base}^2}{\frac{S_{base}}{3}}$$

$$Z_{base\Delta} = \frac{3V_{base}^2}{S_{base}} \tag{29}$$

Si se compara la ecuación (27) y la (29) se obtiene:

$$Z_{base\Delta} = 3Z_{baseY} \tag{30}$$

Tomando en cuenta que para sistemas trifásicos equilibrados la impedancia en unidades reales de la conexión delta es tres veces la impedancia en unidades reales de la impedancia en estrella.

$$Z_\Delta[\Omega] = 3Z_Y[\Omega] \tag{31}$$

Si se considera entonces esta propiedad (31) y la establecida para las bases (30), en cada una de las definiciones de impedancias para cargas simétricas en por unidad.

$$Z_Y[p.u] = \frac{Z_Y[\Omega]}{Z_{baseY}} \tag{26}$$

$$Z_\Delta[p.u] = \frac{Z_\Delta[\Omega]}{Z_{base\Delta}} \tag{28}$$

resulta:

$$Z_\Delta[p.u] = Z_Y[p.u] \tag{32}$$

Lo antes expuesto demuestra que en las cantidades por unidad se elimina la equivalencia que existe entre sistemas conectados en delta o en estrella; siempre que las bases cumplan con la equivalencia entre delta y estrella.

3.8 Transformadores Monofásicos en el Sistema por unidad

Los transformadores son uno de los elementos dentro del sistema de potencia de mayor uso, es por ello que se le dedica especial interés en su trato dentro del sistema por unidad.

Suponga un transformador de potencia monofásico, ideal, de dos arrollados. Como se considera ideal, no posee asociado pérdidas o reactancia interna, resultando en forma explícita le relación de transformación es N_1:N_2, el cual es conectado a una carga de impedancia Z_{20}.

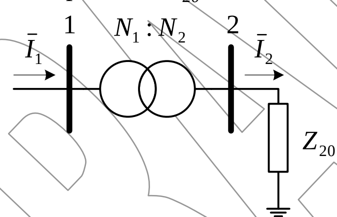


Fig. 3.4. Transformador de Potencia Monofásico de Dos Arrollados

Por teoría de máquinas eléctricas se conoce que en un transformador monofásico ideal, satisface que el cociente de los voltajes primario a secundario (V_1/V_2) es numéricamente igual al cociente del número de vueltas primario y secundario (N_1/N_2).

$$\frac{V_1[Volt]}{V_2[Volt]} = \frac{N_1[Vueltas]}{N_2[Vueltas]} \tag{33}$$

Si se selecciona las bases de tensión de manera que cumplan con la relación de transformación.

$$\frac{V_{base1}}{V_{base2}} = \frac{N_1}{N_2} \tag{34}$$

siendo:

V_{1base} : Voltaje base en la barra 1
V_{2base} : Voltaje base en la barra 2

Si se procede a igualar las ecuaciones (33) en (34)

$$\frac{V_1[Volt]}{V_2[Volt]} = \frac{V_{base1}}{V_{base2}}$$

$$\frac{\bar{V}_1[Volt]}{V_{base1}} = \frac{\bar{V}_2[Volt]}{V_{base2}}$$

En atención a la definición de los valores por unidad, en cada una de las barras del transformador:

$$\bar{V}_1[p.u] = \frac{\bar{V}_1[Volt]}{V_{base1}}$$

$$\bar{V}_2[p.u] = \frac{\bar{V}_2[Volt]}{V_{base2}}$$

resultando evidente que:

$$\bar{V}_1[p.u.] = \bar{V}_2[p.u.] \tag{35}$$

De lo antes expuesto se concluye que cuando se expresan las tensiones de un transformador en el sistema por unidad se elimina la relación de transformación, pero esto solo es cierto cuando las bases cumplen con la relación de transformación.

Por otra parte, en un transformador monofásico, se cumple que las corrientes satisfacen a la relación de transformación:

$$\frac{I_2[Amp]}{I_1[Amp]} = \frac{N_1[Vueltas]}{N_2[Vueltas]} \tag{36}$$

Si las bases de corriente son seleccionadas convenientemente para que satisfagan la relación de transformación:

$$\frac{I_{base2}}{I_{base1}} = \frac{N_1}{N_2} \tag{37}$$

donde:

I_{base1} : Corriente base en la barra 1
I_{base2} : Corriente base en la barra 2

entonces igualando las expresiones (36) y (37) se tiene:

$$\frac{\bar{I}_1[Amp]}{\bar{I}_2[Amp]} = \frac{I_{base1}}{I_{base2}}$$

$$\frac{\bar{I}_1[Amp]}{I_{base1}} = \frac{\bar{I}_2[Amp]}{I_{base2}}$$

Si se toma en cuenta la definición de los valores por unidad parta la corriente, en cada una de las barras del transformador:

$$\bar{I}_1[p.u] = \frac{\bar{I}_1[Amp]}{I_{base1}}$$

$$\bar{I}_2[p.u] = \frac{\bar{I}_2[Amp]}{I_{base2}}$$

el resultado final es:

$$\bar{I}_1[p.u.] = \bar{I}_2[p.u.] \tag{38}$$

De manera tal que si se eligen las bases de corrientes en ambos lados del transformador para que cumplan con la relación de transformación, el valor de corriente en el sistema por unidad de un lado y otro del transformador son iguales.

Nótese que el hecho de que en los valores de tensión y corriente en el sistema por unidad, se elimina el acoplamiento magnético.

En un transformador monofásico, se puede seleccionar como valores bases arbitrarias en cualquiera de las combinaciones de corriente y tensión; pero los restantes son calculados mediante el empleo de la relación de transformación.

$$\frac{V_{base1}}{V_{base2}} = \frac{N_1}{N_2} = \frac{I_{base2}}{I_{base1}} \tag{39}$$

Ahora considérese que el transformador de potencia de dos arrollados monofásico posee una carga Z_{20} conectada en la barra 2.

Se puede afirmar que en variables reales, el voltaje en la carga viene dado por la ley de Ohm.

$$\bar{V}_2[Volt] = Z_{20}[\Omega]\bar{I}_2[Amp] \tag{40}$$

Si se asume que la impedancia Z_{20} referida al primario es Z_{10}, entonces es valedera la aplicación de la ley de Ohm en unidades reales al primero.

$$\bar{V}_1[Volt] = Z_{10}[\Omega]\bar{I}_1[Amp] \tag{41}$$

Se conoce por teoría de el sistema por unidad que si las bases de tensión

$$\frac{\bar{V}_1[Volt]}{V_{base1}} = \frac{\bar{V}_2[Volt]}{V_{base2}}$$

sustituyendo (40) y (41).

$$\frac{Z_{10}[\Omega]\bar{I}_1[Amp]}{V_{base1}} = \frac{Z_{20}[\Omega]\bar{I}_2[Amp]}{V_{base2}}$$

Pero, por definición de valores por unidad, las corrientes de ambos lados resultan:

$$\bar{I}_1[Amp] = \bar{I}_1[p.u]I_{base1}$$
$$\bar{I}_2[Amp] = \bar{I}_2[p.u]I_{base2}$$

$$\frac{Z_{10}[\Omega]\bar{I}_1[p.u]I_{base1}}{V_{base1}} = \frac{Z_{20}[\Omega]\bar{I}_2[p.u]I_{base2}}{V_{base2}}$$

$$\bar{I}_1[p.u.] = \bar{I}_2[p.u.] \qquad (38)$$

entonces:

$$\frac{Z_{10}[\Omega]\bar{I}_1[p.u]I_{base1}}{V_{base1}} = \frac{Z_{20}[\Omega]\bar{I}_2[p.u]I_{base2}}{V_{base2}}$$

si :

$$\frac{\bar{I}_1[Amp]}{I_{base1}} = \frac{\bar{I}_2[Amp]}{I_{base2}}$$

finalmente:

$$\frac{Z_{10}[\Omega]\bar{I}_1[p.u]}{\left(\dfrac{V_{base1}}{I_{base1}}\right)} = \frac{Z_{20}[\Omega]\bar{I}_2[p.u]}{\left(\dfrac{V_{base2}}{I_{base2}}\right)}$$

$$\frac{Z_{10}[\Omega]}{\left(\dfrac{V_{base1}}{I_{base1}}\right)} = \frac{Z_{20}[\Omega]}{\left(\dfrac{V_{base2}}{I_{base2}}\right)}$$

$$\frac{Z_{10}[\Omega]}{Z_{10base}} = \frac{Z_{20}[\Omega]}{Z_{20base}}$$

$$Z_{10}[p.u.] = Z_{20}[p.u.] \qquad (29)$$

De lo expuesto anteriormente se deduce que la impedancia Z_{20} [Ω] referida al lado primario Z_{10} [Ω] son iguales en cantidades por unidad, demostrando que en el sistema por unidad las impedancias [p.u] son iguales no importa de que lado del transformador se expresen.

3.9 Caída de Voltaje en un Elemento en el Sistema Por Unidad

Se tiene una impedancia Z_{12} [Ω] entre dos puntos de un sistema que puede ser la impedancia de una línea de transmisión o la equivalente de un transformador.

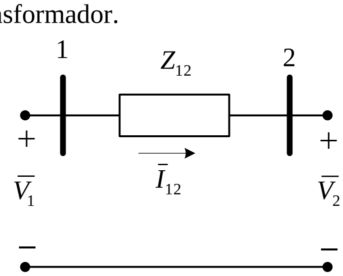


Fig. 3.5. Impedancia entre dos bus.

Se conoce por definición de sistemas por unidad:

$$\bar{V}_{12}[p.u] = \frac{\bar{V}_{12}[Volt]}{V_{base}}$$

$$\bar{V}_{12}[p.u] = \frac{Z_{12}[\Omega]\bar{I}_2[Amp]I_{base}}{V_{base}I_{base}}$$

$$\bar{V}_{12}[p.u] = \frac{Z_{12}[\Omega]\bar{I}_2[Amp]}{Z_{base}I_{base}}$$

$$\bar{V}_{12}[p.u] = Z_{12}[p.u.]\bar{I}_{12}[p.u.] \qquad (30)$$

Se observa que la caída de tensión en una impedancia en por unidad es igual al producto de los valores en por unidad de esa impedancia por la corriente circulante.

3.9.1. Sistemas Monofásico con Varios Transformadores

El sistema de por unidad es particularmente útil cuando se trabaja con sistemas con varias estaciones de transformación.

Suponga que se tiene un sistema monofásico como el de la figura, con dos transformadores ideales y una línea de transmisión.

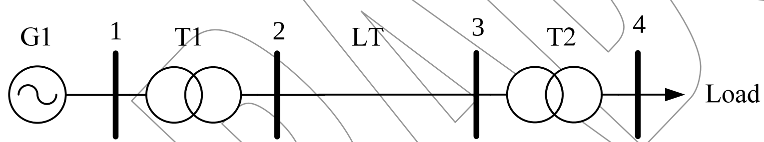


Fig. 3.6. Sistema de Potencia con dos transformadores

Se disponen de los datos nominales de los transformadores, de la línea de transmisión y de la carga. Se conocen de cada elemento:

T1 : S_{1n}; V_{1n} / V_{2n}
T2 : S_{2n}; V_{3n}/V_{4n}
L.T : Z_{23} [Ω]
Load : Z_L [Ω]

Se desea calcular el valor del voltaje y la impedancia en la barra 1 (V_1, Z_{10}) en por unidad.

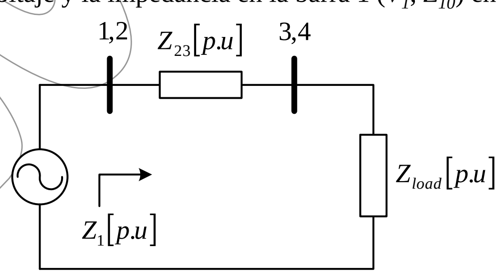


Fig. 3.7. Modelo equivalente de impedancia

Para trabajar el sistema de potencia de la figura en por unidad se procede de la siguiente forma:

- Se seleccionan dos valores base arbitrarios; y se calculan el resto. *Por ejemplo:* se toma la tensión V_{1base} y una potencia S_{base}, esta capacidad puede ser la de alguno de los transformadores o bien un valor arbitrario el cual va a ser común para todo el sistema.
- Se delimitan las diferentes zonas para las cuales los valores bases son comunes y dependen del número de transformadores.
- Se determinan los valores bases desconocidos.

$$V_{base2} = \overline{V}_{2n} \frac{V_{base1}}{\overline{V}_{1n}}$$

$$V_{base3} = V_{base2}$$

$$V_{base4} = \overline{V}_{4n} \frac{V_{base3}}{\overline{V}_{3n}}$$

$$I_{base4} = \frac{S_{base}}{V_{base4}}$$

$$I_{base3} = \frac{\overline{V}_{4n} I_{base4}}{\overline{V}_{3n}}$$

$$I_{base2} = I_{base3}$$

$$I_{base1} = \frac{\overline{V}_{2n} I_{base2}}{\overline{V}_{1n}}$$

$$Z_{baseLT} = \frac{V_{base2}^2}{S_{base}}$$

$$Z_{baseL} = \frac{V_{base4}^2}{S_{base}}$$

$$Z_{base1} = \frac{V_{base1}^2}{S_{base}}$$

- Se determina un circuito equivalente para el sistema.

Siendo los transformadores T1 y T2 ideales se cumple que cualquier tensión V_1 [p.u] = V_2 [p.u] = V_3 [p.u] = V_4 [p.u]. Estas relaciones equivalen a eliminar el acoplamiento magnético. Así pues, el circuito equivalente expresando todas las variables en p.u. queda:
donde :

$$Z_{23}[p.u] = \frac{Z_{23}[\Omega]}{Z_{baseLT}}$$

$$Z_L[p.u] = \frac{Z_L[\Omega]}{Z_{baseL}}$$

$$I_L[p.u] = \frac{I_L[Amp]}{I_{base4}}$$

$$I_1[p.u] = I_2[p.u] = I_3[p.u] = I_4[p.u]$$

$$I_L[p.u] = I_1[p.u]$$

$$V_{23}[p.u] = Z_{23}[p.u] I_L[p.u]$$

$$V_4[p.u] = Z_L[p.u] I_L[p.u]$$

$$V_1[p.u] = V_{23}[p.u] + V_4[p.u]$$

$$Z_1[p.u] = \frac{Z_1[\Omega]}{Z_{base1}} = \frac{V_1[p.u]}{I_1[p.u]}$$

$$Z_1[p.u] = \frac{V_{23}[p.u] + V_4[p.u]}{I_1[p.u]}$$

$$Z_1[p.u] = Z_{23}[p.u] + Z_4[p.u]$$

Se nota que la impedancia vista en la barra 1, es igual a la sumatoria de las impedancias de los distintos elementos, como si los transformadores no existiesen, esto se debe a que los transformadores son ideales.

3.10 Sistema por unidad con transformadores reales

En los sistemas de potencia, es necesario considerar los elementos lo más cerca de la realidad posible, y en el transformador de potencia real hay que tomar en cuenta para el análisis en sistema por unidad los siguientes aspectos:

- La corriente de excitación.
- La impedancia equivalente.

En los transformadores de potencia la corriente de excitación o de magnetización se puede considerar despreciable, debido a que por lo general es muy pequeña, del orden del 5% de la corriente nominal, por lo cual se aproxima despreciable.

Para la impedancia, considere un transformador monofásico real, con una impedancia equivalente $Z_T[\Omega]$, vista desde el primario.

En la representación de un transformador monofásico real, se realiza con una barra ficticia 3-3' la cual no existe físicamente, pero que sirve para modelar el transformador real, como uno ideal en serie con su impedancia.

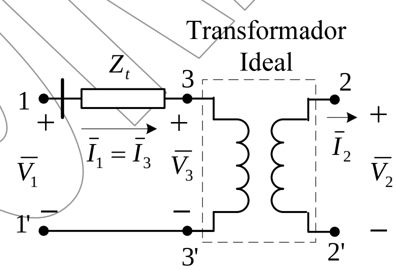


Fig. 3.8. Modelo equivalente para un transformador real

Si se seleccionan dos valores bases V_{base1} y I_{base1}, empleando el sistema por unidad se tiene que:

$$V_3[p.u] = V_2[p.u]$$

Entonces el circuito equivalente para el transformador 1ϕ real se puede representar por:

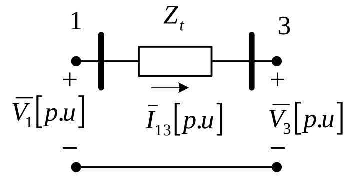


Fig. 3.9. Modelo equivalente para un transformador real en el sistema por unidad

$$V_1[p.u] = V_3[p.u] + I_1[p.u] Z_T[p.u]$$

En los transformadores el valor de la impedancia del transformador se puede obtener de las características nominales del mismo.

La placa de especificaciones del transformador, traen el valor de Z_T, normalmente el fabricante específico este valor en % dando R, X en potencia.

En los transformadores de potencia usualmente se considera sólo la reactancia, la cual viene expresada en forma porcentual. Este porcentaje es el valor de la X_{eq}, expresada como el porcentaje de la caída de tensión que se producía al circular por X_{eq} la corriente nominal del transformador.

$$R_{eq}[\%] = \frac{R_{eq}[\Omega] I_{\text{nominal}}}{V_{\text{nominal}}} \times 100\% \qquad (31)$$

$$X_{eq}[\%] = \frac{X_{eq}[\Omega] I_{\text{nominal}}}{V_{\text{nominal}}} \times 100\% \qquad (32)$$

El porcentaje representa la caída de tensión que se produce al circular por R_{eq} ó X_{eq} la corriente nominal del transformador expresada en porcentaje de la tensión nominal, de acuerdo al lado considerado.

Si por ejemplo se toma como base la corriente y el voltaje nominal como bases resulta:

$$R_{eq}[\%] = \frac{R_{eq}[\Omega] I_{\text{nominal}}}{V_{\text{nominal}}} \times 100\% \qquad (31)$$

$$X_{eq}[\%] = \frac{X_{eq}[\Omega] I_{\text{nominal}}}{V_{\text{nominal}}} \times 100\% \qquad (32)$$

$$X_{eq}[\%] = X_{eq}[\Omega] \times \frac{100\%}{Z_{base}} \qquad (33)$$

Ejemplo

Sea un transformador de potencia monofásico de 50MVA, 11/132 kV y reactancia igual X=10%. ¿Qué significado tiene la esta reactancia?

Resolución

El significado físico de este 10% es que la caída de tensión en X_{eq} cuando el transformador está trabajando a plena es el 10% de la tensión nominal (13.2 kV), referida al secundario.

Ejemplo
Dado un transformador monofásico con los siguientes datos de placa: 50 MVA, 11/132 kV, X_1 = 0.242 Ω y X_2 = 34.848 Ω (visto del lado de alta). Determinar el valor de la reactancia porcentual vista de ambos lados.
Resolución

- La corriente nominal en ambos lados del transformador es:

$$I_{1n} = \frac{50MVA}{11kV} = 4545.45Amp$$

$$I_{2n} = \frac{50MVA}{132kV} = 378.78Amp$$

- Se determinan los valores de reactancia en porcentaje para ambos lados del transformador:

$$X_{alta}[\%] = X_2[\Omega]\frac{I_{1n}}{V_{1n}}100\%$$

$$X_{alta}[\%] = 34.848\Omega\frac{378.78Amp}{132kV}100\%$$

$$X_{alta} = 10\%$$

$$X_{baja}[\%] = X_1[\Omega]\frac{I_{2n}}{V_{2n}}100\%$$

$$X_{baja}[\%] = 0.242\Omega\frac{4545.45Amp}{11kV}100\%$$

$$X_{baja} = 10\%$$

La reactancia del lado de alta y baja es igual, un resultado que era de esperarse por teoría.

$$X_{baja}[\%] = X_{alta}[\%]$$

3.11 Cambios de base en el Sistema Por Unidad

En muchas ocasiones y con frecuencia ciertos parámetros de un sistema son expresados en valor por unidad pero con valores de base diferentes a los seleccionados en el sistema; por tanto, se hace necesario efectuar un cambio de base. Tal es el caso de las reactancias de los transformadores, que son expresados en valor porcentual con respecto a los valores nominales de cada uno de los transformadores. Dado que las impedancias de cualquier parte del sistema tienen que ser expresadas respecto a la misma impedancia base, al hacer los cálculos, es preciso tener un medio para pasar las impedancias de una base a otra.

Se conoce que la impedancia por unidad de un elemento de circuitos es:

$$Z[p.u] = Z[\Omega]\frac{S_{base}}{V_{base}^2} \tag{34}$$

Las unidades típicas en el análisis de sistemas de potencia:

$$Z[p.u] = Z[\Omega]\frac{MVA_{base}}{kV_{base}^2}$$

Sean :

$Z_1[p.u]$: Impedancia en p.u considerando los valores de base 1

$Z_2[p.u]$: Impedancia en p.u considerando los valores de base 2
S_{base1}, V_{base1} : Valores base para $Z_1[p.u]$
S_{base2}, V_{base2} : Valores base para $Z_2[p.u]$
se tiene :

$$Z_2[p.u] = Z_1[p.u]\frac{S_{base2}}{S_{base1}}\left(\frac{V_{base1}}{V_{base2}}\right)^2 \tag{35}$$

Esta ecuación no tiene ninguna relación con la transferencia del valor de impedancia de un lado a otro de un transformador.

Ejemplo
La reactancia *X* de un generador es 0.20 por unidad basada en los datos de placa del generador: 13.2 kV, 30 MVA. La base para los cálculos es 13.8 kV, 50 MVA. Determinar el valor de X" para las nuevas bases.

Resolución

Considerando la ecuación de cambio da bases dada en (35) se tiene:

$$X_{new}[p.u] = X_{old}[p.u]\frac{S_{new}}{S_{old}}\left(\frac{V_{old}}{V_{new}}\right)^2$$

En este caso los valores *old* son aquellos en los que estaba definido originalmente la reactancia y loas *new* son aquellos a los que se quiere referir el valores por unidad de la reactancia.

$$X_{old} = 0.20\,p.u \quad V_{old} = 13.2kV \quad S_{old} = 30MVA$$
$$X_{new} = ¿? \quad V_{new} = 13.8kV \quad S_{new} = 50MVA$$

Sustituyendo los respectivos valores se obtiene

$$X_{new}[p.u] = 0.20\,p.u\,\frac{50MVA}{30MVA}\left(\frac{13.8kV}{13.2kV}\right)^2$$

$$X_{new} = 0.306\,p.u$$

Este valor esta referido en las bases de 13.8 kV y 50 MVA.

Ejemplo
Supóngase que se tiene un transformador de 186.6 MVA, 69/220 kV, y reactancia de 8%. Determinar el valor de la reactancia expresada en las bases de 230 kV, 100 MVA.

Resolución

Se conoce que el fabricante entrega el valor de la reactancia de este transformador en porcentaje (cien veces el valor por unidad), de los datos de placa, $X_{old} = 0.08\,p.u \quad V_{old} = 220kV \quad S_{old} = 186.6MVA$. Es importante aclarar que un transformador es el único elemento que modifica las bases. Un transformador ha de tener tantas bases de voltaje corriente, e impedancia como devanados tenga el mismo. En este caso, la base de voltaje se refiere al lado de alta.

$$X_{new}[p.u] = X_{old}[p.u]\frac{S_{new}}{S_{old}}\left(\frac{V_{old}}{V_{new}}\right)^2$$

Sustituyendo los respectivos valores:

$$X_{new}[p.u] = 0.08\,p.u\,\frac{100MVA}{186.6MVA}\left(\frac{220kV}{230kV}\right)^2$$

$$X_{new} = 0.03922\,p.u$$

3.12 Transformadores de Tres Devanados

El transformador de tres devanados es aquel en el que se incluye un tercer devanado por cada fase, se llaman también transformadores de circuitos o devanados múltiples. El tercer arrollado que se incluye por cada fase suele ser denominado *terciario*.

Un punto de vista especialmente importante en la utilización del transformador de tres devanados, es la posibilidad de utilizar las ventajas de la conexión Y-Y (estrella-estrella) de los transformadores de dos devanados al tiempo que el terciario se conecta en delta, con el fin de reducir los efectos indeseables de la conexión Y-Y de sus otros dos devanados.

Los transformadores de tres devanados son generalmente utilizados para los siguientes fines:

- En conexión Y-Y de los devanados de alta y baja, y se conecta el terciario en corto o delta, lo cual tiene la finalidad de reducir en forma apreciable los terceros armónicos de tensión que de otra forma estaría presentes en el devanado de baja de donde se alimenta la carga.
- En el caso de que se requiera interconectar tres circuitos de diferentes niveles de voltaje, siendo la opción más económica y práctica utilizar un transformador de tres devanados y no dos transformadores de dos arrollados con diferente relación de transformación.
- Para alimentar cargas que requieran una alta confiabilidad en el servicio, para lo cual se alimentarían de dos fuentes diferentes. Este tipo de conexión se hace particularmente utilizada en la planta de generación Macagua II, propiedad de la empresa EDELCA, en Venezuela, donde dos generadores son conectados a los devanados secundarios y terciario, y la carga en el primario.

En la actualidad los transformadores de tres devanados tienen amplia aceptación en centrales y subestaciones, para distribuir energía en tres niveles de tensión con el uso de un solo transformador, siendo las razones de mayor peso, la índole económica el espacio físico, y la eficiencia superior de estas máquinas comparadas con la de dos arrollados.

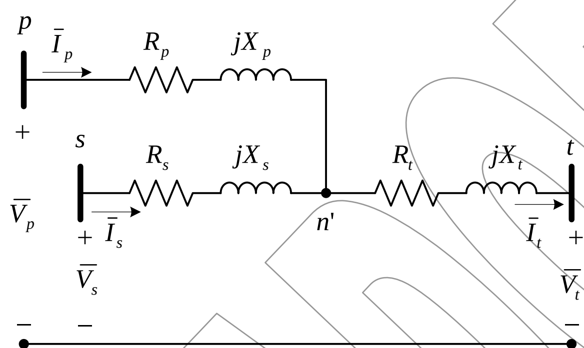
En el transformador de tres devanados al igual que en el caso de dos arrollados se siguen cumpliendo las relación de transformación (en el caso de máquinas ideales), solo que van a existir tres relaciones, productos de las interacciones magnéticas de los tres arrollados.

$$\frac{V_{\text{primario}}}{V_{\text{secundario}}} = \frac{N_{\text{primario}}}{N_{\text{secundario}}}$$

$$\frac{V_{\text{primario}}}{V_{\text{terciario}}} = \frac{N_{\text{primario}}}{N_{\text{terciario}}}$$

$$\frac{V_{\text{secundario}}}{V_{\text{terciario}}} = \frac{N_{\text{secundario}}}{N_{\text{terciario}}}$$

El modelo equivalente de un transformador de tres devanados ideal, consta de tres impedancias Z_p, Z_s, y Z_t en conexión estrella.



Siendo :

Z_p : Impedancia del arrollado primario $Z_p = R_p + jX_p$.

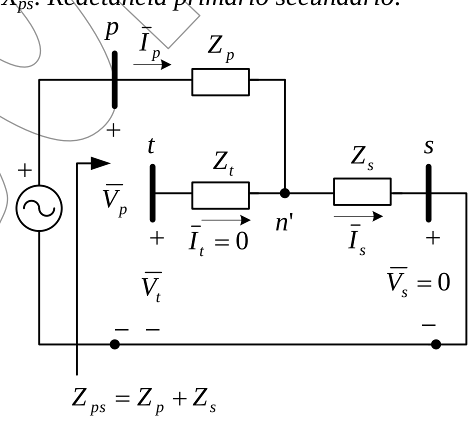
Z_s : Impedancia del arrollado secundario $Z_s = R_s + jX_s$.

Z_t : Impedancia del arrollado terciario $Z_t = R_t + jX_t$.

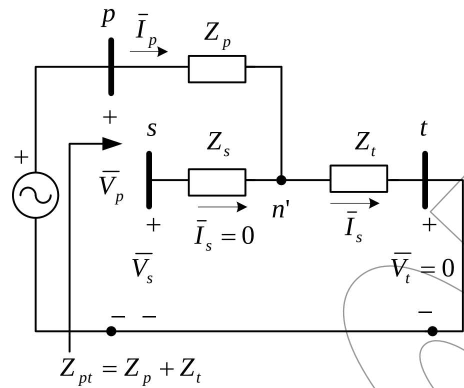
Estas impedancias al igual que el transformador de dos arrollados se obtienen a partir de los ensayos de cortocircuito realizados a la máquina; con la única diferencia que en el caso de la máquina de tres arrollados a de aplicarse igual número de veces el ensayo.

En el ensayo de cortocircuito de un transformador de tres arrollados se debe realizar en tres etapas (por simplicidad en la representación solo se ha considerado la parte reactiva de la impedancia):

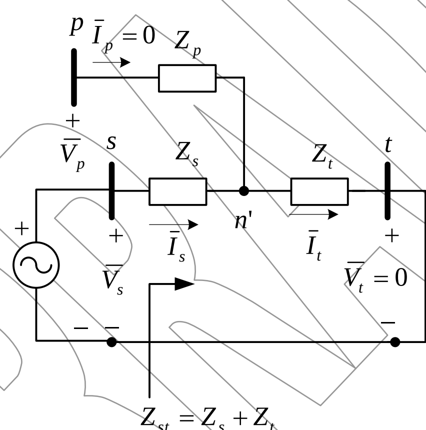
- *Alimentar por el primario, se cortocircuita el secundario*, teniendo presente que no se debe superar la menor potencia de los devanados involucrados en el ensayo en este caso del secundario, la reactancia de cortocircuito que se mide es X_{ps}: *Reactancia primario secundario.*



- *Se alimenta por el devanado primario mientras se cortocircuita el terciario*, de igual forma no se debe superar la menor de las potencias de los devanados en ensayo, en este caso por lo general el del terciario. La impedancia que se obtiene del ensayo es X_{pt} : *Reactancia primario terciario*.



- *Se alimenta por el secundario al tiempo que se cortocircuita el terciario*, nuevamente se cuida que no se supere la menor de las dos potencias en ensayo. Del ensayo se obtiene X_{st}: *Reactancia secundario terciario*.



De los tres ensayos de cortocircuito se obtiene un conjunto de tres ecuaciones lineales con tres incógnitas (X_p, X_s, X_t):

$$\begin{cases} X_{pt} = X_p + X_t \\ X_{st} = X_s + X_t \\ X_{ps} = X_p + X_s \end{cases}$$

Si se resuelven las tres ecuaciones se tiene:

$$X_p = \frac{1}{2}\left(X_{ps} + X_{pt} - X_{st}\right)$$

$$X_s = \frac{1}{2}\left(X_{ps} + X_{st} - X_{pt}\right)$$

$$X_t = \frac{1}{2}\left(X_{pt} + X_{st} - X_{ps}\right)$$

En los transformadores de tres devanados los fabricantes proporcionan en la placa, los valores en porcentaje (%) de las reactancias obtenidas en los ensayos de cortocircuito.

$$Z_{ps}[\%] = 100\% \times Z_{ps}[p.u]$$
$$Z_{pt}[\%] = 100\% \times Z_{pt}[p.u]$$
$$Z_{ps}[\%] = 100\% \times Z_{ps}[p.u]$$

El valor en porcentaje representa cien veces el valor por unidad de la impedancia de cortocircuito, este valor expresado en las bases del ensayo.

Ejemplo

Supóngase un transformador monofásico de tres devanados 100/100/10 MVA, 765/√3:400/√3:13.8/√3 kV, X_{ps} = 10%, X_{st} = 8%, X_{pt} = 5%. Estos valores en porcentaje representan:

$$X_{ps} = 0.1\ p.u$$
$$X_{st} = 0.08\ p.u$$
$$X_{pt} = 0.05\ p.u$$

Ahora bien las bases de esto valor por unidad se obtienen de los ensayos.

- X_{ps}, se hace alimentando por el primario y cortocircuitando el secundario, es decir que la base de tensión de X_{ps} es 765/√3 kV, y la potencia base la menor de las de los arrollados involucrados 100 MVA.
- X_{st} se alimenta por el secundario, por lo que la base de tensión es 400/√3 kV, y la de potencia es la del arrollado de menor potencia en ensayo, 10 MVA, la del terciario.
- X_{pt}, se alimenta por el primario y se cortocircuita el terciario, por lo que las bases son 13.8/√3 kV, y 10 MVA.

Reactancia	Bases (kV ; MVA)
Xps = 0.1 p.u	765/√3 ; 100
Xst = 0.08 p.u	400√3 ; 10
Xpt = 0.05 p.u	765/√3 ; 10