Anexo 1.2

Operación Matriciales y Matrices en Sistemas de Potencia

Problema Resuelto

Considere la red mostrada en la Figura 1.1, y los siguientes datos.

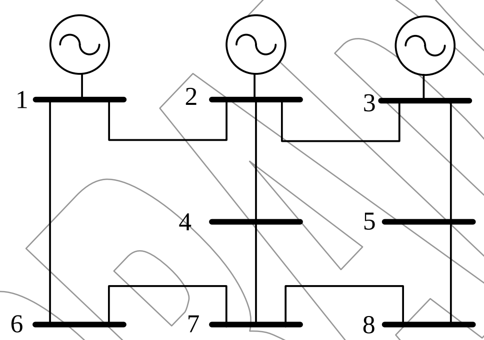


Fig. 1.1.

Tabla. 1.2. Datos del Sistema

Línea	X_L
0-1	0.010
0-2	0.015
1-2	0.084
0-3	0.005
2-3	0.122
2-4	0.084
3-5	0.037
1-6	0.126
6-7	0.168
4-7	0.084
5-8	0.037
7-8	0.140

La matriz que caracteriza la red es formada por el ensamble de los elementos del sistema uno a la vez, y por la modificación de la matriz para reflejar el cambio en la impedancia equivalente de la red por la adición de la línea. La lista de líneas ha sido reordenada desde una lista aleatoria a una secuencia tal que es posible conectar cada línea al sistema cuando esta es seleccionada desde la lista de procesamiento.

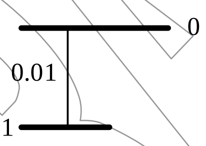
1.1.1. Adición de la Primera línea.

La primera línea debe ser siempre una línea conectada a referencia. Entonces la línea 0-1 debe ser la primera línea procesada. En este pinto, no hay red, no hay matriz, y no hay entrada en la lista de barras que describe el sistema. Las barras 0 y 1 son examinada y comparadas con la lista de barras del sistema para determinar el tipo de línea y el algoritmo a ser usado. La linees es del tipo de una línea conectada desde referencia a la barra 1. La barra 1 es comparada con las lista del sistema. En este punto no hay barras en el sistema. Esta línea de tal modo, es una degeneración del cado de la adición de una nueva barra.

Es imposible agregar una fila y columnas de ceros a la matriz debido a que no existe matriz en este punto. Los elementos de la diagonal del nuevo eje es la impedancia de la línea a ser agregada, $\hat{Z}_{01} = 0.01 jp.u$. La nueva barra es agregada a la lista de barra. Luego de agregar esta primera línea, se tiene:

$$Z_{bus} = [0.01] \qquad \text{Lista de barras} = 1$$

El diagrama del sistema es mostrado abajo.



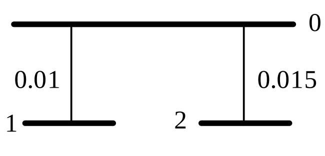
La matriz dice que una corriente inyectada a la barra 1 podría causar un voltaje de 0.01 p.u, en la barra 1 cuando se mide con respecto a la barra de referencia.

1.1.2. Adición de la Segunda línea.

La próxima línea (0-2) es seleccionada desde la lita de procesamiento. Examinando las barras de numero 0 y 2, y comparando con la lista de barras del sistema, se muestra que esta línea se encuentra conectada entre referencia y una barra nueva, la barra 2. Esta operación es también del tipo 1. Aumentando la matriz en una fila y una columna de ceros. El elemento de la diagonal de la nueva fila y columna es la impedancia de la nueva línea, $\hat{Z}_{02} = 0.015 jp.u$. Agregando la barra 2 a la lista resulta:

$$Z_{bus} = \begin{array}{c} 1 \\ 2 \end{array} \begin{bmatrix} 0.01 & 0 \\ 0 & 0.015 \end{bmatrix} \qquad \text{Lista de barras} = 1,2$$

El diagrama del sistema es mostrado abajo.



La matriz muestra que una inyección de una corriente unitaria en la barra 1 y saliendo en referencia, causa un voltaje de 0.01 en la barra 1, y un voltaje cero aparezca en la barra 2. Y una inyección de corriente unitaria en la barra 2 producirá un voltaje de 0.015 *p.u*, en la barra 2 y un voltaje cero en la barra 1.

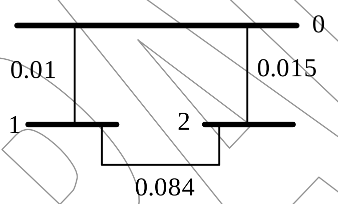
1.1.3. Adición de la Tercera línea.

La próxima línea (1-2) es seleccionada desde la lista de procesamiento. Un examen en la lista de barras, muestra que esta línea no posee una línea a referencia. Comparando con los números de barra de la línea con las barras del sistema, se verifica que es una operación del tipo 3 (cierre de un lazo, o agregar un elemento entre dos barras existentes).

La matriz es aumentada por una fila y columna *lazo*, los cuales son matemáticamente obtenidos sus elementos por la diferencia de las columnas (o filas) correspondientes a las barras 1 y 2. El elemento de la diagonal es obtenido por la respectiva ecuación teórica de $Z_{lazo,lazo}$.

$$Z_{bus} = \begin{array}{r} 1 \\ 2 \\ loop \end{array} \begin{bmatrix} 0.01 & 0 & 0.01 \\ 0 & 0.015 & -0.015 \\ 0.01 & -0.015 & 0.109 \end{bmatrix} \qquad \text{Lista de barras} = 1,2$$

El diagrama del sistema es mostrado en la siguiente figura.



La matriz es reducida por la aplicación de la reducción de Kron. Como se conoce de teoría, la reducción de Kron es importantemente reducida cuando un solo orden (una fila una columna) esta involucrada en la reducción. En este caso Z_4^{-1} se transforma en $1/Z_4$, y no se requiere invertir una matriz (con todas las complicaciones asociadas). La modificación de los elementos que están fuera de la columna y fila lazo puede ser mas fácilmente llevada a cabo elemento a elemento, más que empleando la ecuación en su versión matricial.

Se puede verificar fácilmente que la modificación para un elemento, Z_{ij} es simplemente:

$$Z'_{ij} = Z_{ij} - Z_{i-loop}\left(\frac{1}{Z_{loop,loop}}\right)Z_{loop-j}$$

$$\begin{array}{r} \\ i \\ loop \end{array} \begin{bmatrix} & j & & loop \\ & | & & \\ - & Z_{ij} & \rightarrow & Z_{i-loop} \\ & \downarrow & & \\ & Z_{loop-j} & \rightarrow & Z_{loop-loop} \end{bmatrix}$$

Aplicando la ecuación antes definida, se procede a modificar todos los elementos que no pertenecen al orden del loop. En este caso, la fila y columna lazo son eliminados.

$$Z'_{11} = Z_{11} - Z_{1-loop}\left(\frac{1}{Z_{loop-loop}}\right)Z_{loop-1}$$

$$Z'_{11} = 0.01 - \frac{0.01 \times 0.01}{0.109} \qquad Z'_{11} = 0.00908257\, p.u$$

$$Z'_{12} = Z_{12} - Z_{1-loop}\left(\frac{1}{Z_{loop-loop}}\right)Z_{loop-2}$$

$$Z'_{12} = 0 - \frac{0 \times -0.015}{0.109} \qquad Z'_{12} = 0.00137615\, p.u$$

$$Z'_{22} = Z_{22} - Z_{2-loop}\left(\frac{1}{Z_{loop-loop}}\right)Z_{loop-2}$$

$$Z'_{22} = 0.015 - \frac{-0.015 \times -0.015}{0.109} \qquad Z'_{22} = 0.01293579\, p.u$$

La matriz modificada es:

$$Z_{bus} = \begin{array}{c} 1 \\ 2 \end{array}\begin{bmatrix} 0.00908257 & 0.00137615 \\ 0.00137615 & 0.01293579 \end{bmatrix} \qquad \text{Lista de barras} = 1,2$$

1.1.4. Reducción Matricial - Una conversión Delta-Estrella.

La reducción matricial puede ser vista como una reducción delta-estrella de la red. Es decir, los tres enlaces en la operación anterior forma una delta cuyos vértices son referencia, barra 1 y barra 2, la cual puede ser transformada empleando la conversión estándar delta estrella.

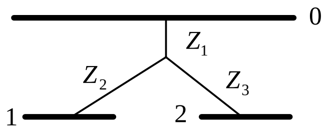
$$Z_1 = \frac{0.01 \times 0.015}{0.01 + 0.015 + 0.084} \qquad Z_1 = 0.00137615$$

$$Z_2 = \frac{0.01 \times 0.084}{0.01 + 0.015 + 0.084} \qquad Z_2 = 0.00770642$$

$$Z_3 = \frac{0.015 \times 0.084}{0.01 + 0.015 + 0.084} \qquad Z_3 = 0.001155964$$

Si la red de la siguiente figura, se le inyecta una corriente unitaria en la barra 1, la impedancia en el punto de inyección Z_{11}, es la suma de Z_1 y Z_2.

$$Z_{11} = 0.00137615 + 0.0077062 = 0.00908257$$



El voltaje de la barra 2 es igual a la caída de voltaje en la impedancia Z_1 = 0.00137615. Esta es la impedancia de transferencia, Z_{12}.

En el punto de inyección de la barra 2, se obtiene una impedancia por el drenado de una corriente de uno por unidad en la barra 2 de:

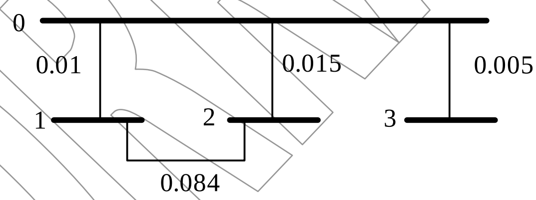
$$Z_{22} = Z_1 + Z_3 = 0.01293579$$

Esos valores concuerdan con la matriz obtenida por la reducción de Kron. Entonces la reducción puede ser vista como una reducción de red o como una manipulación algebraica.

1.1.5. Adición de la Cuarta Línea.

Continuando con el algoritmo de construcción se procede a procesar la selección de la próxima línea, 0-3. Esta línea es identificada como una línea de tipo 1, es decir una línea entre referencia y una barra nueva, 3. La matriz es aumentada en una fila y una columna de ceros y la diagonal de esta, es el valor de la línea a agregar $\hat{Z}_{03} = 0.005\, jp.u$. La nueva barra es agregada a la lista de barras.

$$Z_{bus} = \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array}\begin{bmatrix} 0.00908257 & 0.00137615 & 0 \\ 0.00137615 & 0.01293579 & 0 \\ 0 & 0 & 0.005 \end{bmatrix} \qquad \text{Lista de barras} = 1,2,3$$



1.1.6. Adición de la Quinta Línea.

La próxima línea en la lista de datos (2-3) es una línea que cierra lazo, debido a que ambas barras estan en la lista de barras del sistema. La fila y columna de lazo es la diferencia de las columnas correspondientes a las barras 2 y 3. El elemento de la diagonal es dado por:

$$Z_{loop-loop} = Z_{22} + Z_{33} - 2Z_{23} + \hat{Z}_{23}$$

$$Z_{loop-loop} = 0.01293578 + 0.005 - 2\times 0 + 0.122$$

$$Z_{loop-loop} = 0.13993578$$

La matriz aumentada es:

$$Z_{bus} = \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ loop \end{array} \begin{bmatrix} 0.00908257 & 0.00137615 & 0 & 0.00137615 \\ 0.00137615 & 0.01293579 & 0 & 0.01293579 \\ & & 0.005 & -0.005 \\ & & & 0.13935579 \end{bmatrix}$$

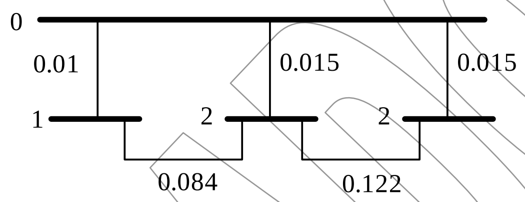
Lista de barras = 1,2,3

Aplicando la reducción de Kron:

$$Z_{bus} = \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \begin{bmatrix} 0.00906904 & 0.00124893 & 0.00004917 \\ 0.00124893 & 0.01178999 & 0.00046220 \\ 0.00004917 & 0.00046220 & 0.00482135 \end{bmatrix}$$

Lista de barras = 1,2,3

El diagrama del sistema es mostrado como sigue:



1.1.7. Adición de la Sexta Línea.

La línea 2-4, es identificado como una línea del tipo 2, es decir, una línea entre una barra existente (2) y una barra nueva (4). Una nueva fila y columna deben ser agregadas la matriz. El elemento de la diagonal es dado por:

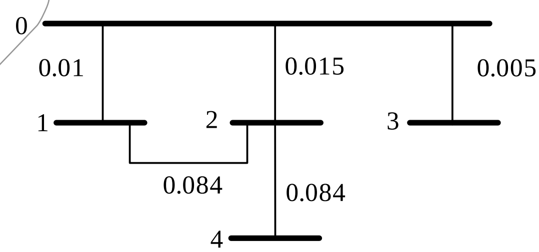
$$Z_{44} = Z_{22} + \hat{Z}_{24} = 0.011739999 + 0.084 = 0.095739999$$

Los elementos fuera de la diagonal son obtenidos de maneta muy sencilla. La columna correspondiente a la barra 4 es idéntica a la columna de la barra 2.

$$Z_{bus} = \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \begin{bmatrix} 0.00906904 & 0.00124893 & 0.00004917 & 0.00124893 \\ 0.00124893 & 0.01178999 & 0.00046220 & 0.01178999 \\ 0.00004917 & 0.00046220 & 0.00482135 & 0.00046220 \\ 0.00124893 & 0.01178999 & 0.00046220 & 0.09573999 \end{bmatrix}$$

Lista de barras = 1,2,3,4

El diagrama del sistema resulta.



1.1.8. Adición de la Línea Siete.

La adición de la línea 3-5, es una línea de tipo 2, es decir entre una barra existente (3) y una barra nueva (5). Resulta:

$$Z_{55} = Z_{33} + \hat{Z}_{35} = 0.00482135 + 0.037 = 0.04182135$$

La columna 5 es el duplicado de la columna 5, resultando:

$$Z_{bus} = \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array} \begin{bmatrix} 0.00906904 & 0.00124893 & 0.00004917 & 0.00124893 & 0.00004917 \\ 0.00124893 & 0.01178999 & 0.00046220 & 0.01178999 & 0.00046220 \\ 0.00004917 & 0.00046220 & 0.00482135 & 0.00046220 & 0.00482135 \\ 0.00124893 & 0.01178999 & 0.00046220 & 0.09573999 & 0.00046220 \\ 0.00004917 & 0.00046220 & 0.00482135 & 0.00046220 & 0.04182135 \end{bmatrix}$$

Lista de barras = 1,2,3,4,5

1.1.9. Adición de la Línea Ocho.

La adición al sistema de la línea 1-6 la cual es desde la barra existente 1 a la nueva barra 6, y es llevado a cabo como se indico en la línea 3-5 (línea tipo 2).

1.1.10. Adición de la Línea Nueve.

La línea 6-7, es también del tipo 2, en la cual la línea esta entre una barra existente la 6 y una barra nueva la 7. el proceso ya ha sido ilustrado en detalles en pasos anteriores.

Luego de estos dos pasos, la matriz debe incluir las dos líneas ya descritas, siendo la matriz definitiva en estos pasos:

$$Z_{bus} = \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \end{array} \begin{pmatrix} 0.00906904 & 0.00124893 & 0.00004917 & 0.00124893 & 0.00004917 & 0.00906904 & 0.00906904 \\ 0.00124893 & 0.01178999 & 0.00046220 & 0.01178999 & 0.00046220 & 0.00906904 & 0.00906904 \\ 0.00004917 & 0.00046220 & 0.00482135 & 0.00046220 & 0.00482135 & 0.00004917 & 0.00004917 \\ 0.00124893 & 0.01178999 & 0.00046220 & 0.09573999 & 0.00046220 & 0.00124893 & 0.00124893 \\ 0.00004917 & 0.00046220 & 0.00482135 & 0.00046220 & 0.04182135 & 0.00004917 & 0.00004917 \\ 0.00906904 & 0.00124893 & 0.00004917 & 0.00124893 & 0.00004917 & 0.13506904 & 0.13506904 \\ 0.00906904 & 0.00124893 & 0.00004917 & 0.00124893 & 0.00004917 & 0.13506904 & 0.30306904 \end{pmatrix}$$

Lista de barras = 1,2,3,4,5,6,7

1.1.11. Adición de la Línea Diez.

La línea 4-7 es una línea que cierra lazo, debido a que ambas barras ya están dentro del sistema. La columna lazo son obtenida tomando la diferencia entre la columnas 4 y 7. El elemento de la diagonal, queda dado por:

$$Z_{loop-loop} = Z_{44} + Z_{77} - 2Z_{47} + \hat{Z}_{47}$$

$$Z_{loop-loop} = 0.09573999 + 0.30306904 - 2 \times 0.00124893 + 0.084$$

La fila y columna lazo se luego eliminada por el uso de la reducción de Kron, lo cual ya fue ilustrado, en pasos anteriores.

1.1.12. Adición de la Línea Onceava.

La línea 5-8 es del tipo 2, es decir que una línea entre una barra existente (5) y una barra nueva (8), cuyo procedimiento ya ha sido ilustrado.

1.1.13. Adición de la Última Línea.

La última línea 7-8, es una línea que cierra lazo. El método ha sido ilustrado. Puede ser visto fácilmente que sin importar la complejidad de la red, esta puede ser ensamblada por este simple medio, de agregar un elemento a la vez. La matriz completa del ejemplo dado para propósitos de referencia queda dada por:

$$Z_{bus} = \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \end{array} \begin{pmatrix} 0.00889104 & 0.00132842 & 0.0011167 & 0.00204268 & 0.00056903 & 0.0062615 & 0.00275695 & 0.00102639 \\ 0.00132842 & 0.01134623 & 0.00055371 & 0.00833387 & 0.00137805 & 0.00303974 & 0.00532152 & 0.00220239 \\ 0.0011167 & 0.00055371 & 0.00475959 & 0.00120070 & 0.00425613 & 0.00085568 & 0.00184769 & 0.00375267 \\ 0.00204268 & 0.00833387 & 0.00120070 & 0.06620613 & 0.00792254 & 0.01834370 & 0.04007839 & 0.01464439 \\ 0.00056903 & 0.00137805 & 0.00425613 & 0.00792254 & 0.03662437 & 0.00652532 & 0.01446703 & 0.03199261 \\ 0.00626215 & 0.00303974 & 0.00085568 & 0.01834370 & 0.00652532 & 0.08999879 & 0.03364765 & 0.01219496 \\ 0.00275695 & 0.00532152 & 0.00184769 & 0.04007839 & 0.01446703 & 0.03364765 & 0.07483526 & 0.02708638 \\ 0.00102639 & 0.00220239 & 0.0375267 & 0.01464439 & 0.03199261 & 0.01219496 & 0.02708638 & 0.06023255 \end{pmatrix}$$

1.1.14. Análisis de Falla

Un completo análisis de falla del sistema es posible una vez que la matriz impedancia de barra $\mathbf{Z}_{\mathbf{bus}}$ del sistema esta completada. Usando los valores que están dentro de la matriz de la red de ejemplo, para propósitos ilustrativos, considere el nodo 3, el cual esta en condiciones de falla.

El elemento de la matriz, Z_{33} = 0.00475959, significa que, si un voltaje de ese valor es aplicado entre la barra 3 y referencia, una corriente toral de 1.0 por unidad fluirá a través de la red. El voltaje completo del generador causará una corriente que puede ser determinado considerando.

$$\frac{I'}{I} = \frac{E'}{E}$$

En donde I = 1.0 cuando E = 0.00475959. Se desea conocer el valor de I' cuando E' = 1.0 p.u.

$$I' = \frac{1.0}{0.00475959} = 210.10\, p.u$$

En forma más general, para cualquier valor de voltaje de barra resulta:

$$I' = \frac{E'}{Z_{33}}$$

La corriente de falla total puede ser obtenida ya sea en p.u, o MVA dividiendo los amperes base, pu, o la base de MVAR de los datos de línea por el correspondiente elemento de la diagonal.

La contribución a la falla por una línea es calculada muy simplemente. La contribución desde la barra 2 a la falla en la barra 3 viene dada por:

$$I_{23} = \frac{Z_{23} - Z_{32}}{\hat{Z}_{23}} \frac{E'}{Z_{33}}$$

Sustituyendo los respectivos valores, se obtiene:

$$I_{23} = \frac{Z_{23} - Z_{32}}{\hat{Z}_{23}} \frac{E'}{Z_{33}} = \frac{0.00475959 - 0.00055371}{0.122 \times 0.00475959}$$

$$I_{23} = 7.2\, p.u$$

Nota: La base aquí fue 1.0 y el flujo están en por unidad. La base en amperes o MVA también se pudo haber empleado.

1.1.15. Voltajes en Barra Durante la Condición de Falla

El voltaje en la barra 2, cuando una corriente unitaria es eyectada en la barra 3, es Z_{23} = 0.00055371. El voltaje en la barra 3 en ese momento es 0.00475959. La diferencia en el voltaje es $Z_{33} - Z_{32}$ = 0.00475959 – 0.00055371 = 0.00420588. La diferencia ocurre si una corriente es de 1.0 pero la corriente de falla fue determinada por $1/Z_{33}$. La diferencia de voltaje entre las barras 2 y 3 es entonces:

$$\frac{Z_{33} - Z_{32}}{Z_{33}} = \frac{0.00420588}{0.00475959} = 0.8835\, p.u$$

Pero el voltaje en la barra 3 durante la falla es cero. De tal modo que el voltaje en la barra 2 es = 0.8835.

1.2 Abriendo una Línea Durante un Estudio

Una línea de un sistema puede ser abierta o removida agregando una línea en paralelo con la línea existente. La impedancia de la nueva línea a ser agregada es el negativo de la línea original. En este caso se esta agregando una línea entre dos barras ya existentes de modo, que las ecuaciones empleadas para cerrar un lazo y la reducción de kron deben ser empleadas.

En el curso de una estudio de falla completo es frecuentemente deseable abrir cada línea conectada a la barra fallada, una a la vez para obtener la nueva falla total y al contribución de las líneas remanentes. Es deseable modificar la matriz del sistema total debido a que el gran objetivo de calculo no debe ser hecho en elementos innecesarios que no son requeridos en el análisis. Sin embargo, es indeseable (debido al redondeo), remover una línea, y regresarla, luego remover otra, y volver a agregarla, y así sucesivamente. Errores pueden acumularse en los elementos de la matriz impedancia de barra debido a las repetitivas modificaciones de la matriz.

El mejor método es extraer una pequeña matriz, de la matriz total, que incluye el punto de interés y las impedancias de transferencia a la barra a ser fallada, y sus barras inmediatamente vecinas.

Por ejemplo, si la barra 3 se considera fallada, se extrae la pequeña matriz

$$\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array}\begin{bmatrix} 0.00475959 & 0.00055371 & 0.00425613 \\ 0.00055371 & 0.01134623 & 0.00137805 \\ 0.00425613 & 0.00137805 & 0.03662437 \end{bmatrix}$$

Para abrir la línea 3-5, se agrega una línea (cerrando lazo) cuya impedancia es el negativo de la impedancia de línea original -0.037. El elemento de la diagonal de la fila y comuna lazo queda dado por:

$$Z_{loop-loop} = Z_{33} + Z_{55} - 2Z_{35} + \hat{Z}_{35}$$

$$Z_{loop-loop} = 0.00475959 + 0.03662437 - 2 \times 0.00425613 - 0.037$$

$$Z_{loop-loop} = -0.00412830\, p.u$$

La columna lazo es obtenida restando la columna 5 de la columna 3.

$$\begin{array}{r} 2 \\ 3 \\ 5 \\ loop \end{array}\begin{bmatrix} 0.00475959 & 0.00055371 & 0.00425613 & 0.00050346 \\ 0.00055371 & 0.01134623 & 0.00137805 & -0.00082434 \\ 0.00425613 & 0.00137805 & 0.03662437 & -0.03236834 \\ 0.00050346 & -0.03236834 & -0.03236834 & -0.00412830 \end{bmatrix}$$

En el interés de la eficiencia, la reducción de kron es usada para modificar solamente la columna 3, debido a una falla en 3 puede ser completamente analizada con solamente esos valores.

El vector fila modificado que refleja la línea abierta 3-5 es:

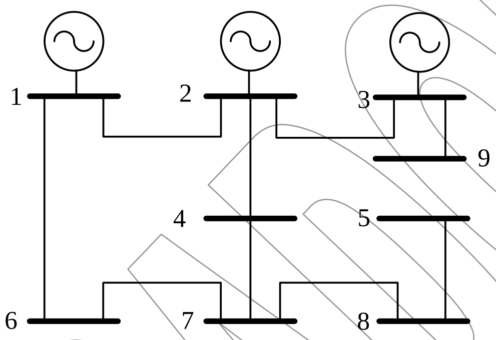
$$3\begin{bmatrix} 0.00482099 & 0.0045317 & 0.00030870 \end{bmatrix}$$

La nueva corriente de falla es:

$$\frac{base}{Z_{33}} = \frac{1}{0.00482099} = 207.43\,p.u$$

La contribución desde la barra 2, se determina que es 7.4 p.u. El flujo desde la barra 5 a la 3 sobre la línea de X = 0.037 p.u., es la misma magnitud que la que fluye por la línea de X = -0.037, pero con signo opuesto. La contribución neta desde 5 a 3 es de tal modo cero.

Teniendo el vector fila, el cual da el valor de la corriente en la barra 3 con la línea 3 a 5 fuera de servicio, permite una excelente oportunidad de determinar la magnitud de la corriente de falla que fluiría si la falla fuese removida desde la barra 3 y colocada en el extremo de la línea del interruptor abierto en la barra 5, en la línea 3-5 (ver Figura siguiente).



El vector columna provee la impedancia del punto de interés y las impedancias de transferencia de la barra 3 con la línea en abierto. La impedancia del punto de inyección de la barra 9 es obtenido. Debido a que la línea 3-9 es una línea radial desde la barra 3, resulta:

$$Z_{qq} = Z_{33} + \hat{Z}_{35} = 0.04182099$$

La corriente de falla en el punto 9 es = base/0.04182099 = -23.91 p.u.