Capítulo 2-2

Criterio de Áreas Iguales

2.1 Métodos de Estudio de Estabilidad

El análisis de estabilidad transitoria puede emprendido por:

- Métodos Clásicos.
- Métodos Directos.
- Métodos Híbridos.

El primer método directo, fue el Criterio de Áreas Iguales, (*Equal Area Criteria*) para una máquina conectada a una barra de potencia infinita (*OMIB One Machine Infinite Bus*). Luego le han seguido métodos directos más refinados. Liapunov, se asocia con el principio de invarianza de LaSelle, el cual es empleado para estimar la región de estabilidad del sistema de potencia (función de Liapunov).

En 1966, El Abiad y Nagapan, calcularon todos los Puntos de Equilibrio Inestables (UEP Unestable Equilibrium Point) alrededor de los Puntos de Eequilibrio Estable (SEP Stable Equilibrium Point) bajo investigación. En 1979 se implementa el Control de los Puntos de Equilibrio Inestable (Control UEP) por el uso del criterio de aceleración.

En 1978, Kakimoto presenta el Método *PEBS Potencial Energy Boundary Surface* o Método de superficies de contorno de energía potencial, posee la ventaja que una estimación de CCT es obtenido sin el calculo de los puntos inestables de equilibrio pero como desventaja en algunos casos provee estimaciones no conservativas. En 1994, (*BPU: Boundary Control UEP*) Control de Borde de Puntos de Equilibrio Inestables (Chiang), el cual esta basado en el concepto de controlar los UEP.

2.2 Criterio de Áreas Iguales

2.2.1. Generalidades

Los estudios de estabilidad involucran el tratamiento con la ecuación de oscilación de la máquina (1), la cual en si forma más simple es una ecuación no lineal.

$$\frac{H_b}{\pi f}\frac{d^2\delta(t)}{dt^2} = P_{acel} \tag{1}$$

La soluciones formales de (1), no se pueden encontrar explícitamente; bajo las mayores simplificaciones apunta hacia integrales elípticas. Como se ha dicho, encontrar la solución de esta ecuación en forma literal es sumamente difícil, de modo que tradicionalmente, el problema de estabilidad generalizado ha sido enfocado a los métodos clásicos, que se basan en la resolución por métodos numéricos.

En el caso más simple, una máquina contra una barra de potencia infinita (*One Machine Infinite Bus*), o dos máquinas, el estudio de estabilidad puede ser efectuado con métodos que no requieren resolver la ecuación de oscilación, siendo los denominados métodos directos. El más simple de los métodos directos es el denominado criterio de áreas iguales.

La ecuación de oscilación permite describir el comportamiento electromecánico de la maquina sincrónica al ocurrir una perturbación.

La resolución de la ecuación de oscilación de manera formal es un trabajo casi imposible en el mas simple de los casos, y con el empleo de los métodos clásicos se transforma en un trabajo largo, además realizar la representación de las curvas de oscilación para determinar si el ángulo de potencia de la máquina aumenta indefinidamente u oscila alrededor de una posición equilibrio, en ocasiones pueden ser pocos necesarios.

Si se resuelve la ecuación de oscilación, con la suposición de potencia mecánica constante, que el sistema es netamente reactivo y que la tensión detrás de la reactancia transitoria, se puede demostrar que el ángulo de potencia δ(t) oscila alrededor de un punto de equilibrio con amplitud constante, siempre que no se sobrepase el límite de estabilidad transitoria.

En el caso de una sola máquina el método de las áreas iguales es mucho más simple que resolver la ecuación de oscilación; pero aunque este método no es aplicable a sistemas que contengan varias máquinas, esté criterio ayuda a comprender en qué forma influyen ciertos factores en la estabilidad, en régimen transitorio, para un sistema cualquiera.

2.3 Deducción

Para deducir el criterio de áreas iguales se hace para una máquina (G) y una barra de potencia infinita (∞), aunque las consideraciones efectuadas, pueden ser elevadas para el caso de un sistema general de dos máquinas.

Supóngase que se tiene una máquina sincrónica la cual se encuentra conectada mediante una reactancia ($X_{G\infty} = X'_d + X_{T1} + X_{T2} + X_{LT1} // X_{LT2}$) a un gran sistema, que se puede considerar como una *barra de potencia infinita*.

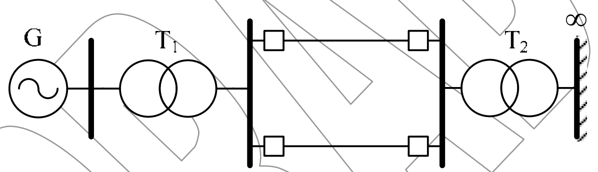

Figura 1. Sistema de Potencia Típico de un Generador conectado a través de un sistema de transmisión a una barra de potencia infinita

Esta máquina puede oscilar, respecto a la barra de potencia infinita, cumpliendo con la ecuación de oscilación:

$$\frac{2H}{\omega_s}\frac{d^2\delta(t)}{dt^2} = P_{acel} = \left(P_{mec} - P_{elec}\right) \tag{1}$$

Siendo la velocidad angular relativa del rotor a la velocidad sincrónica, dada por:

$$\omega_{rel} = \frac{d\delta(t)}{dt} = \omega(t) - \omega_s \tag{1'}$$

La potencia eléctrica (P_{elec}) entregada por la máquina puede ser obtenida de la relación potencia ángulo:

$$P_{elec} = \frac{\left|\overline{E}_i'\right|\left|\overline{V}_\infty\right|}{X_{G\infty}} sen\delta(t)$$

en donde $\overline{E}_i'$ es el voltaje detrás de la reactancia transitoria de eje directo X_d'. Y $X_{G\infty} = X'_d + X_{T1} + X_{T2} + X_{LT1} // X_{LT2}$, la reactancia equivalente desde el generador a la barra de potencia infinita.

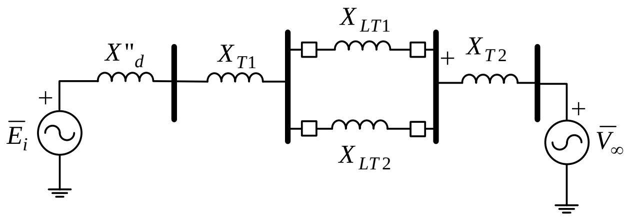

Figura 2. Diagrama de ractancias del sistema mostrado en la Figura 1

Considerando lo anterior la ecuación de oscilación de la máquina conectada a la barra de potencia infinita es:

$$\frac{2H}{\omega_s}\frac{d^2\delta(t)}{dt^2} = M\frac{d^2\delta(t)}{dt^2} = P_{acel} = P_{mec} - P_{elec}$$

$$M\frac{d^2\delta(t)}{dt^2} = P_{acel} = P_{mec} - \frac{|\overline{E}_i'||\overline{V}_\infty|}{X_{G\infty}}sen\delta(t)$$

Antes de que exista la perturbación en la máquina, ésta se encuentra operando en estado estable y la potencia mecánica (P_{mec}) inyectada al generador es igual a la potencia eléctrica de salida (P_{elec}), por lo que la potencia total acelerante es cero (P_{acel}), siempre que se desprecie, las pérdidas por rozamiento mecánica, por fricción del aire, por corriente de Facoult, etc.

$$P_{mec} = P_{elec} = \frac{|\overline{E}_i'||\overline{V}_\infty|}{X_{G\infty}}sen\delta(t)$$

En estas condiciones estables de operación, la velocidad real del rotor $\omega(t)$, es igual a la velocidad sincrónica ω_s, de modo que la velocidad relativa del rotor es cero $\omega_{rel} = 0$.

$$\omega_{rel} = \frac{d\delta(t)}{dt} = \omega(t) - \omega_s = 0 \qquad (1')$$

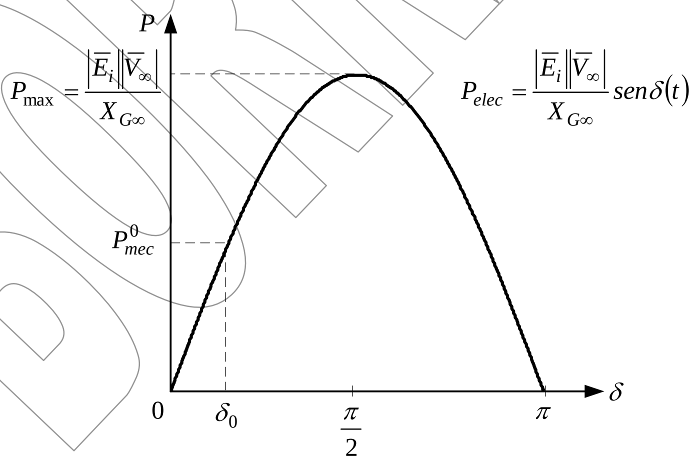

Figura 3. Característica *P-δ*, mostrando el punto de equilibrio inicial

Supóngase que ésta posición de equilibrio entre las potencias mecánica y eléctrica (despreciando las pérdidas) ocurre para un cierto ángulo de potencia inicial *δ0.*

Multiplíquese en ambos miembros de la ecuación de oscilación de la máquina por la primera derivada del ángulo de potencia respecto al tiempo ($d\delta(t)/dt$), resulta:

$$\frac{d\delta(t)}{dt} M \frac{d^2\delta(t)}{dt^2} = \left(P_{mec} - P_{elec}\right)\frac{d\delta(t)}{dt}$$

Ahora, se conoce por teoría de cálculo diferencial

$$\frac{d\left(\left[f(t)\right]^2\right)}{dt} = 2 f(t)\frac{df(t)}{dt}$$

Si se considera $f(t) = \frac{d\delta(t)}{dt}$, entonces es valido:

$$\frac{d\left(\left[\frac{d\delta(t)}{dt}\right]^2\right)}{dt} = 2\frac{d\delta(t)}{dt}\frac{d^2\delta(t)}{dt^2}$$

entonces:

$$\frac{1}{2}\frac{d\left(\left[\frac{d\delta(t)}{dt}\right]^2\right)}{dt} = \frac{d\delta(t)}{dt}\frac{d^2\delta(t)}{dt^2}$$

El primer térmico de la ecuación anterior, puede ser reescrito, de una manera más simple como:

$$\frac{d\delta(t)}{dt} M \frac{d^2\delta(t)}{dt^2} = \frac{M}{2}\frac{d\left(\left[\frac{d\delta(t)}{dt}\right]^2\right)}{dt} = \left(P_{mec} - P_{elec}\right)\frac{d\delta(t)}{dt}$$

Multiplicando en ambos miembros de la ecuación por diferencial de tiempo se tiene:

$$d\left(\left[\frac{d\delta(t)}{dt}\right]^2\right) = 2\frac{\left(P_{mec} - P_{elec}\right)}{M} d\delta(t)$$

Si se integra con respecto al tiempo t, conociendo que $\delta(t)$ varía entre el ángulo inicial δ_0 hasta un ángulo δ_1

$$\left[\frac{d\delta(t)}{dt}\right]^2 = \int_{\delta_0}^{\delta_1} 2\frac{\left(P_{mec} - P_{elec}\right)}{M} d\delta(t)$$

$$\left[\frac{d\delta(t)}{dt}\right] = \sqrt{\int_{\delta_0}^{\delta_1} 2\frac{\left(P_{mec} - P_{elec}\right)}{M} d\delta(t)}$$

la integral plantada dentro del radical, se una integral definida evaluada entre el ángulo $\delta 0$, el cual corresponde al ángulo de potencia de la máquina cuando ésta funciona sincrónicamente antes que se produzca la perturbación, es decir $d\delta(t)/dt = 0$.

En general el ángulo de potencia $\delta(t)$ dejará de oscilar y la máquina volverá a funcionar sincrónicamente después de la perturbación cuando $d\delta(t)/dt = 0$, o mejor escrito:

$$\left[\frac{d\delta(t)}{dt}\right]^2 = \sqrt{\int_{\delta_0}^{\delta_1} 2\frac{(P_{mec} - P_{elec})}{M} d\delta(t)}$$

Se puede justificar que la máquina no permanecerá estática, respecto a la barra de potencia infinita, la primera vez que $d\delta(t)/dt$ se anule, pero el hecho de que por un instante el ángulo de potencia deje de oscilar, puede ser interpretado como una indicación de estabilidad, por la interpretación geométrica de la derivada; el hecho de que $d\delta(t)/dt$ se anule, corresponde al punto en que la curva de oscilación de la máquina cuando el ángulo $\delta(t)$ alcanza el máximo y empieza a disminuir.

Considérese una máquina sincrónica operando como generador conectada a una barra de potencia infinita, la cual funciona en sincronismo con un ángulo de potencia inicial $\delta 0$ para la cual entrega una cierta potencia eléctrica que viene dado por:

$$P_{mec} = P_{elec} = \frac{\left|\overline{E}_i'\right|\left|\overline{V}_\infty\right|}{X_{G\infty}} sen\delta(t)$$

Esta ecuación es valida, siempre que se considere que la resistencia eléctrica de la máquina es muy pequeña.

Si se consideran despreciables las pérdidas de la máquina, tales como fricción mecánica y roce del aire, además de las corrientes de Facoult, la potencia mecánica (P_{mec0}) y la eléctrica (P_{elec1}) en la máquina son iguales, para un estado de operación normal.

Supóngase que la potencia mecánica a la entrada del generador es aumenta bruscamente, pasando instantáneamente de P_{mec0} a P_{mec1}. Evidentemente la barra de potencia infinita no puede absorber cualquier cambio de potencia eléctrica mientras el voltaje y la frecuencia permanezcan constantes. La diferencia que existe entre la potencia mecánica y la potencia eléctrica, se traduce en una potencia de aceleración (P_{acel}), que almacena en el rotor en forma de energía cinética; ocasionando un aumento de la velocidad del rotor, con lo que el ángulo de potencia aumenta desde δ_0 hasta un nuevo valor.

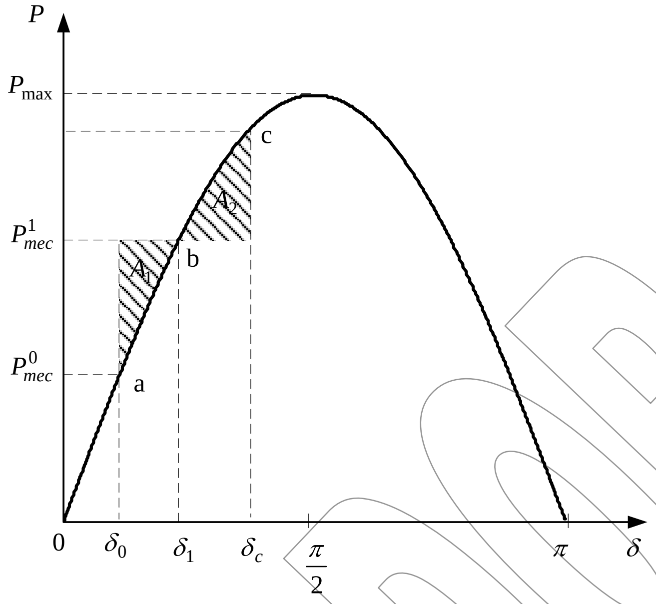

Figura 4. Diagrama de Potencia-Angulo para un cambio en la Potencia Mecánica

El sistema giratorio rotórico, continuará en aceleración siempre que la potencia mecánica inyectada en el eje del rotor sea mayor que la potencia eléctrica entregada en el generador, es decir desde el punto "a", hasta el punto "b"; con lo que se aumenta el ángulo de potencia desde δ_0 hasta δ_1.La zona indicada como "A_1" corresponde a la zona o *área de aceleración* y el área "A_2" indica la *zona de desaceleración*.

En el punto "b" de la grafica corresponde donde la máquina termina de acelerar pero su velocidad rotórica es aun mayor que la velocidad de sincronismo $\omega(t) \geq \omega_s$, por lo que el ángulo de potencia $\delta(t)$ continua aumentando. En el espacio comprendido entre el punto "b" y "c" la velocidad rotórica permanece por encima de la de sincronismo, la potencia eléctrica es mayor que la potencia mecánica, por lo que se hace presenta una potencia desacelerante, que es entregada por la energía cinética almacenada en el rotor, perdiendo velocidad el rotor, pero el ángulo de potencia $\delta(t)$ continúa aumentando. La zona marcada por "A_2", denota la potencia de desaceleración. Para el punto "c" ocurre que la velocidad rotórica es igual a la velocidad de sincronismo, el rotor continúa perdiendo aceleración, y a partir de aquí su velocidad es menor que la de sincronismo $\omega(t) \leq \omega_s$, disminuyendo el ángulo de potencia $\delta(t)$. Se predice que en este proceso habrá estabilidad alrededor del punto "b" con el nuevo ángulo de potencia δ_1 si el área de desaceleración es igual al área de aceleración ($A_1 = A_2$).

Es importante mencionar que si durante el proceso de oscilación el rotor no puede entregar toda la energía cinética almacenada en el, su velocidad rotórica nunca disminuirá y el ángulo de potencia aumentará indefinidamente, perdiendo el sincronismo la máquina.

Finalmente el criterio de áreas iguales para estabilidad, indica que para que el rotor logre estabilizarse a un nuevo ángulo de potencia, es necesario que el área de desaceleración debe ser igual al área de aceleración($A_1 = A_2$). Cuando el ángulo δ de potencia oscila par alcanzar la estabilidad, debe variar entre δ_0 y δ_{max} . Si la máquina posee amortiguamiento, la oscilación del ángulo de potencia disminuye y se obtiene un funcionamiento estable.

El ángulo de potencia que determina la mayor área de aceleración sin que la máquina pierda el sincronismo, es el llamado *ángulo crítico* δ_c y al tiempo que corresponde para alcanzar el ángulo crítico se le denomina *tiempo crítico* t_c, este define como el tiempo máximo entre el inicio y el despeje de una falla, de manera que el sistema sea transitoriamente estable.

El ángulo de oscilación máxima δ_{max}, se satisface cuando el ángulo de potencia del rotor $\delta(t)$ alcanza máximo y $d\delta(t)/dt = 0$.

Geométricamente se puede estimar el área acelerante "A_1" a través de la expresión:

$$\mathrm{A}_1 = \int_{\delta_0}^{\delta_1} \left(P_{mec} - P_{elec}\right) d\delta$$

De igual forma el área de la zona desacelerante "A_2" puede ser escrita por:

$$\mathrm{A}_2 = \int_{\delta_1}^{\delta_{max}} \left(P_{elec} - P_{mec}\right) d\delta$$

Restando ambas zonas "A_1 - A_2" se obtiene

$$\mathrm{A}_1 - \mathrm{A}_2 = \int_{\delta_0}^{\delta_1} \left(P_{mec} - P_{elec}\right) d\delta - \int_{\delta_1}^{\delta_{max}} \left(P_{elec} - P_{mec}\right) d\delta$$

$$\mathrm{A}_1 - \mathrm{A}_2 = \int_{\delta_0}^{\delta_{max}} \left(P_{mec} - P_{elec}\right) d\delta$$

La ecuación anterior se satisface que $d\delta(t)/dt = 0$, cuando las áreas acelerante y desacelerante son iguales $A_1 = A_2$; por lo que el ángulo máximo se ubica gráficamente de forma que $A_1 = A_2$. Comprender el fenómeno de la máquina, demuestra que la energía ganada cuando el rotor se acelera y el ángulo $\delta(t)$ crece hasta δ_1 se pierde cuando el rotor se frena cuando alcanza el valor δ_{max}.

El análisis precedente fue realizado para la máquina sincrónica operando como generador; pero es igualmente válido para un motor sincrónico cuando la potencia mecánica cambia abruptamente desde P_{mec1} hasta P_{mec2}. La única salvedad del caso generador - motor, es que las áreas quedarán intercambiadas, ya que la potencia acelerante es:

$$P_{acel} = P_{mec} - P_{elec}$$

Si se considera que la potencia acelerante es constante durante el estado transitorio de la máquina, se puede encontrar una expresión que permita relacionar el tiempo crítico con el ángulo crítico.

La potencia acelerante de la máquina al ser perturbada se demostró que se puede escribir como:

$$P_{acel} = M \frac{d^2\delta(t)}{dt^2}$$

$$\frac{d^2\delta(t)}{dt^2} = \frac{P_{acel}}{M}$$

Considerando que la velocidad angular del rotor es cero en el momento de comenzar la perturbación, pero después de t segundos esta velocidad es:

$$\frac{d\delta(t)}{dt} = \int_0^t \frac{P_{acel}}{M} dt = \frac{P_{acel}}{M} t$$

Resultando que el desplazamiento angular rotorico en ese tiempo es:

$$\delta(t) = \delta_0 + \int_0^t \frac{P_{acel}}{M} t dt = \frac{P_{acel}}{2M} t^2 + \delta_0$$

Finalmente el ángulo crítico corresponde al tiempo crítico:

$$\delta_c = \delta_0 + \frac{P_{acel}}{2M} t_c^2$$

de donde :

$$t_c = \sqrt{\frac{2M(\delta_c - \delta)}{P_{acel}}}$$

2.4 Límite de Estabilidad Transitoria

El límite de estabilidad transitoria se refiere al valor de potencia que puede ser transmitida con estabilidad cuando el sistema es sujeto a un perturbación aperiódica (*aperiodic disturbance*). Por perturbación Aperiódica significa una que no se produce con regularidad y solo después de intervalos tales que el sistema alcanza una condición de equilibrio entre perturbaciones. Los tres principales tipos de perturbaciones o disturbios transitorios que reciben consideración en los estudios de estabilidad, en orden de incremento de importancia son:

1. Incrementos de Carga (*Load Changes*)
2. Operaciones de Suicheo o maniobra (*Switching Operations*)
3. Fallas con subsecuentes aislamiento de circuitos (*Circuit Isolation*)