

# Capítulo 3

## Flujo de Potencia

### 3.1 Introducción

Uno de los procedimientos computacionales más comúnmente usados en análisis de sistemas de potencia, es el cálculo de flujo de potencia o flujo de potencia como tradicionalmente es llamado. La planificación, diseño y operación de sistemas de potencia requiere de tales cálculos para analizar el rendimiento en régimen permanente del sistema de potencia bajo variedad de condiciones operativas y a estudiar los efectos de cambios de configuración y equipos.

Las soluciones de flujo de potencia son realizadas usando programas de computadoras diseñados específicamente para este propósito. La pregunta básica del flujo de potencia es: dado el flujo de potencia consumido en todas las barras de una conocida configuración de sistema de potencia, y la potencia producida en cada generador, encontrar el flujo de potencia en cada línea y transformador de la red interconectada y el voltaje en magnitud y ángulo de fase en cada barra.

Analizando la solución de este problema para numerosas condiciones ayuda a asegurar que el sistema de potencia está diseñado para satisfacer su criterio de rendimiento mientras se incurre la más favorable inversión y costo de operación.

Algunos ejemplos de los usos de los estudios de flujo de potencia son determinar lo siguiente:

- Componente o carga de circuitos.
- Voltajes de barra de régimen permanente.
- Flujo de potencia reactiva.
- Ajuste de Tap's de transformadores
- Pérdidas del sistema
- Ajuste de voltaje de excitación del generador/regulador.
- El rendimiento en condiciones de emergencia.

Los sistemas de potencia son complejos y poseen muchas partes o ramales sobre los cuales se producen flujos de potencia.; tales sistemas forman partes en serie y paralelo.

El flujo de potencia eléctrica en esas redes se divide entre los ramales mientras un balance es logrado de acuerdo con las leyes de Kirchoff.

Los programas de computación para resolver el flujo de potencia son dividido en dos tipos estáticos (*Off-Line*) y dinámica (*tiempo real*). La mayoría de los estudios de flujo de potencia están basados en modelos estáticos de redes. Los flujos de potencia en tiempo real (*On Line*) que incorporan entradas de datos desde la red real son usados típicamente por empresas en *Automatic Supervisory Control and Data Acquisition (SCADA)*. Tales sistemas son usados primariamente como herramienta para optimización de generación, control de VAR, despacho, pérdidas y control de líneas de interconexión (*Tie Line*).

La discusión del presente trabajo esta dirigida solo a modelos de red estática y su análisis. Debido a que el problema de flujo de potencia es pertinente a sistemas de potencias balanceados, operando en régimen permanente, modelos monofásicos equivalente de secuencia positiva son usados. El flujo de potencia trifásico es posible analizando con softwares, pero esto no es normalmente necesario en estudios rutinarios de sistemas de potencia.

Un calculo de flujo de potencia determina el estado del sistema de potencia para cada una carga dada y una distribución de generación, este representa una condición de régimen permanente como si esta condición ha sido mantenida por algún tiempo. En la realidad, el flujo en líneas y el voltaje de las barras fluctúa

constantemente por valores pequeños debido a que las cargas cambian constantemente como iluminación, motores, y otras cargas son encendidas y apagadas. Sin embargo, estas pequeñas fluctuaciones pueden ser ignoradas en cálculos de defectos en régimen permanente en equipos del sistema de potencia.

En las cargas de distribución, y posiblemente la red, cambiará considerablemente durante diferentes períodos de tiempo; debiéndose ser necesario obtener soluciones de flujo de potencia representando diferentes condiciones del sistema de potencia, tales como: picos de carga, carga promedio (*average*), carga mínima. Estas soluciones serán usadas para determinar la condición óptima de operación para modos de operación normal; tal como el ajuste propio de los equipos de control de voltaje, o como el sistema responderá a condiciones anormales, tales como la salida de servicio de líneas o transformadores.

Un flujo de potencia forma la base para determinar cuando es la adición de un equipo nuevo es necesario y la efectividad de nuevas alternativas para resolver presentes deficiencias y examinar requerimientos del sistema. El modelo de flujo de potencia es también la base para algunos otros tipos de estudios tales como: cortocircuito, estabilidad, arranque de motores, y estudios de armónico. El modelo de flujo de potencia suplirá los datos de la red y una condición de régimen permanente para ese estudio.

### 3.2 Algoritmos Iterativos de Solución

Desde los artículos técnicos originales describiendo los algoritmos de flujo de potencia aparecidos a mediados de la década de los cincuenta, una interminable colección de esquemas iterativos han sido desarrollados y reportados. Algunos de ellos son variaciones de uno o del otro, de las dos técnicas básicas que son de amplio uso en la industria de hoy: la técnica de Gauss-Seidel y la técnica de Newton-Raphson. Las técnicas preferidas y usadas por la mayoría de los softwares comerciales de flujo de potencia son variaciones de la técnica de Newton. Todas esas técnicas resuelven las ecuaciones de barra en forma de admitancia. Este sistema de ecuaciones ha ganado una amplia aplicación debido a la simplicidad de preparación de datos, y la facilidad con la cual la matriz de admitancia de barra puede ser formada y modificada para subsecuentes casos. En un flujo de potencia, los parámetros primarios son los siguientes:

$P$ : Potencia activa en la red.

$Q$ : Potencia reactiva en la red.

$|V|$ : Magnitud del voltaje de barra

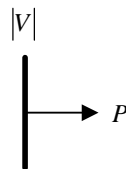
$\delta$ : Ángulo del voltaje de barra a una referencia común.

En razón de definir el problema de flujo de potencia a ser resuelto, es necesario especificar dos de las cuatro cantidades, en cada barra.

#### 3.2.1. Barra Tipo P-V o Barra de Generación

En este tipo de barra se especifica normalmente la potencia activa y el módulo de la tensión ( $P, |V|$ ), éstas barras también son conocidas como *barras de generación*. Para las barras de generación es razonable especificar  $P$  y  $|V|$ , debido a que esos valores son cantidades controlables a través del gobernador y la excitación, respectivamente.

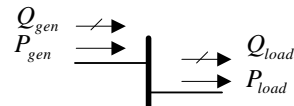
Con frecuencia se dan límites de los valores de la potencia reactiva dependiendo de las características de las máquinas utilizadas individualmente.



Las incógnitas en este tipo de barra son el ángulo del voltaje y la potencia reactiva total inyectada a la barra ( $Q, \delta$ ).

### 3.2.2. Barra Tipo P-Q o Barra de Carga

En este tipo de barras se conocen la potencia activa y la potencia reactiva totales inyectadas a la barra ( $P_{total}$ ,  $Q_{total}$ ), también son conocidas como *barras de carga*; es igualmente válido conocer la potencia activa y el factor de potencia ( $S$ ,  $\cos\phi$ ). Estas barras pueden tener también conectada generación, la potencia total conectada a la barra se determina como:



$$P_{total} = P_{gen} - P_{load} \tag{1}$$

$$Q_{total} = Q_{gen} - Q_{load} \tag{2}$$

En este tipo de barras las incógnitas que se persiguen encontrar por el estudio de flujo de carga son el módulo y el ángulo de la tensión ( $|V|$ ,  $\delta$ ).

### 3.2.3. Barra Tipo Slack, Swing, Oscilante o de Compensación

En los sistemas de transmisión las pérdidas no son conocidas antes del flujo de potencia, es necesario mantener una barra donde  $P$  no es especificada; a esta barra, llamada *swing bus*,  $|V|$  como  $\delta$  son especificadas. Debido a que  $\delta$  es especificado este es mantenido constante durante la solución del flujo de potencia. Este es el ángulo de referencia del sistema. La *barra oscilante* o *swing bus*, es entonces también llamada la *barra de referencia*, debido a que la potencia activa  $P$  y la potencia reactiva  $Q$ , no son especificadas a la swing bus, su libre ajustes “cubre” las pérdidas del sistema de transmisión. La situación de la barra oscilante o flotante puede influir en la complejidad de los cálculos; deberá siempre utilizarse la barra que se aproxima más a una barra de potencia infinita. Normalmente a la barra oscilante se le asigna el número uno como referencia, esta barra tiene conectada la generación y es necesaria para llegar a la solución del flujo de carga.

### 3.2.4. Resumen de Variables Características de Barras

La Tabla 1, resume las especificaciones eléctricas de los tres tipos de barra. La clasificación de barra de generación o barra de carga no debe ser tomada en forma estricta o absoluta; por ejemplo hay ocasiones en que una barra de carga pura puede ser especificada por  $P$  y  $|V|$ .

**Tabla 1. Especificaciones de Barra de Flujo de Potencia**

Tipo de Bus	$P$	$Q$	$ V $	$\delta$	Comentario
PQ - Carga	x	x			Representación de carga usual
PV- Generador o condensadores sincrónicos	x	cuando: $Q_g < Q_{min}$ $Q_g > Q_{max}$	cuando: $Q_{max} < Q_g < Q_{min}$		Generador o Condensador sincrónico ( $P=0$ ) con limite de Vars $Q_{max}$ Limite Superior $Q_{min}$ Limite Inferior  $ V $ es mantenida a lo largo de $Q_g$
Swing			x	x	Swing Bus debe ajustar la potencia neta manteniendo el voltaje constante (esencial para la solución)

**Notas:**

- 1: Las cantidades con el símbolo  $\times$  son condiciones de contorno de las barras.
- 2:  $[P, \delta]$ ,  $[Q, |V|]$  y  $[Q, \delta]$  son combinaciones generalmente no usadas.

La especificación de barras es la herramienta con la cual el ingeniero de potencia manipula la solución del flujo de potencia para obtener la información deseada. El objetivo de la solución del flujo de potencia es determinar dos cantidades nos especificadas en las barra. La especificación del generador que mantiene el voltaje constante y calculando la salida de potencia reactiva, será pasado por alto en la solución del flujo de potencia, si la salida de potencia reactiva alcanza su máximo o límite de mínimo de Vars. En ese caso, la potencia reactiva del generador será mantenido a su respectivo limite y el voltaje de la barra es permitido que varíe.

### 3.3 Métodos de Solución de Flujos de Carga

El calculo de tensiones y flujo de potencia mediante computadoras para pequeños sistemas de potencia es formidable, aunque manualmente puede ser hecho, pero la solución de grandes sistemas de potencia, y en algunas condiciones como requeridos por análisis de sistemas reales requieren de herramientas sofisticadas de cálculo.

La primera solución de flujo de potencia fue realizada con una computadora analógica para propósitos especial, denominada *AC Network Analyzer*, desarrollado a fines de la década de 1920. Los sistemas de potencia bajo estudio fueron representados por una red equivalente a escala. Este equipo permitió el análisis de una variedad de condiciones de operación y planes de expansión, pero el tiempo de preparación era grande. Debido a loas grandes cantidades de equipos envueltos, solo alrededor de cincuenta network analyzer estaban operativos a mediados de los cincuentas.

Las computadoras digitales comenzaron a emerger a finales de la década de los cuarenta, como herramienta de cálculo. Para la mitad de los años cincuenta, computadoras digitales de gran escala de suficiente velocidad y tamaño para manejar los requerimientos de cálculo de sistemas de potencia fueron disponibles. Paralelo al desarrollo del hardware, algoritmos eficientes para resolver las ecuaciones de redes fueron desarrollados. Ward y Hale desarrollaron un muy útil programa de flujo de potencia usando un procedimiento iterativo de Newton modificado en 1956. Las aplicaciones del algoritmo iterativo de Gauss-Seidel siguieron al poco tiempo. Las investigaciones continuaron y el método de Newton Raphson fue introducido en comienzos de 1960. Considerables investigaciones han sido llevadas a cabo a lo largo del tiempo, para aumentar el rendimiento de esos algoritmos, haciéndolos más robustos, y capaces de manejar componentes adicionales de sistemas de potencia, y permitiendo tamaños más grandes de sistemas de potencia.

### 3.4 Datos Asociados a las Barras

Cuando se realizan estudios de flujo de potencia, se especifican normalmente en las barras del sistema los tipos de barras, que son cuatro:

- Barra de Carga
- Barra de Generación
- Barra Swing
- Barra Desconectadas

#### 3.4.1. Barra Flotante o Slack Bus

Es una barra que se especifica una tensión constante en magnitud y fase. El generador efectivo en esta barra suministra las pérdidas en el sistema de potencia, esto es necesario porque el valor de las pérdidas se desconoce hasta que se finalice el cálculo de las corrientes y esto no se puede lograr a no ser que una barra carezca de limitaciones de potencia y pueda alimentar las pérdidas del sistema.

La ubicación de la Slack Bus puede complicar los cálculos, pero siempre deben utilizarse la barra que se aproxime a una barra de potencia infinita.

### 3.4.2. Barra de Carga (PQ)

Es la barra donde se especifica la potencia aparente  $S_k = P_k \pm jQ_k$

### 3.4.3. Barra de Generación (PV)

En este tipo de barra se especifica el valor de la tensión (en magnitud) y la potencia activa, siendo muy común que en estas barras se especifiquen los límites a los valores de potencia reactiva, dependiendo de las características de las máquinas.

### 3.4.4. Barra Desconectada

Una barra desconectada es una barra que esta temporalmente desenergizada, esta no es incluida en la solución del flujo de potencia y esta no debe tener líneas en servicio conectada a ella.

Los términos de barra de carga y barra de generación no deben ser tomados literalmente, una barra de carga es aquella que no posee generador, una barra de carga no necesariamente debe tener carga; esta puede ser simplemente unos puntos de interconexión de una o más líneas de transmisión. Una barra de generación puede tener una carga conectada. La barra swing o slack, es un tipo especial de barra de generación que es necesaria para el proceso de solución. Solo se emplea un swing bus en un sistema de potencia. En las empresas eléctricas, un gran generador (o el mayor) es tomado como la slack bus, y en estudios industriales, la barra de alimentación de la empresa de servicio es tomado como barra oscilante.

Las cargas es normalmente expresada en Mwat y MVAR a voltaje nominal, normalmente, la carga es tratada como MVA constante, que es independiente del voltaje. En algunos casos, una componente de carga de corrientes constante o impedancia constante puede ser incluida como la carga en función del voltaje. Las cargas Shunt son dadas generalmente en MVAR a voltaje nominal.

## 3.5 Información Obtenida de los Estudios de Flujo de Potencia

Los estudios de flujo de potencia determinan los voltajes de las barras y los flujos en todas las ramas (*branch*) para una condición dada. Un flujo de potencia es una serie de calculo hechos cuando ciertos parámetros son colocados a un valor diferente o configuración de circuito es cambiado por el cierre y apertura de breakers, agregando o removiendo una línea, etc. Los estudios de flujo de potencia son llevados a cabo para verificar la operación de un sistema existente es capaz de suplir la carga adicional o para verificar y comparar nuevas alternativas de adición al sistema de nuevas fuentes de poder, cargas o probar el rendimiento del sistema.

Generalmente el estudio de ingeniería de potencia posee un conjunto predefinido de criterios que deben ser cumplidos, estos incluyen los siguientes:

- Criterios de Voltaje, como definido en IEEE Std 141-1993
- Flujos de líneas y transformadores debe estar dentro de los límites nominales térmicos.
- Salida de potencia reactiva generada debe estar dentro de los límites definidos por las curvas de capacidad del generador.

El criterio de voltaje son usualmente divididos dentro de un rango de voltaje aceptable para condiciones normales y un gran rango de voltaje aceptable para condiciones anormales. El criterio térmico de líneas y transformadores pueden también tener tal división permitiendo una sobrecarga (*overload*) temporal debido a la constante de tiempo térmico del equipo o capacidad adicional de transformadores con ventilación forzada.

Un estudio normalmente comienza con la preparación de los casos bases para representar los diferentes modos de operación del sistema o planta. La condición de operación normalmente elegida es máxima carga (aquí la máxima carga se refiere al máximo valor, de carga coincidente, no la suma de todas las cargas) cuando la máxima carga ocurre a diferentes partes del sistema, algunos casos bases pueden ser necesarios. Los casos bases deben representar las condiciones realistas de operación. Condiciones anormales y escenarios pésimos serán agregados luego al estudio.

Los casos bases son analizados para determinar si los voltajes y flujos están dentro del rango aceptable. Si problemas de voltaje o sobrecarga son encontrados, cambios en el sistema pueden ser hechos al dato de flujo de potencia, y el caso resuelto verá si los cambios son efectivos en el remedio del problema. Para remediar problemas de bajo voltaje, los siguientes cambios son posibles:

- Incremento en el voltaje programado de los generadores
- Adición de capacitores Shunt.
- Reconfiguración del sistema, reubicando cargas o liberando cargas en las líneas.
- Desconexión de reactores Shunt.
- Adición de líneas o transformadores.

Remediar líneas sobrecargadas o transformadores cargados, es la mayoría de los remedios aplicados.

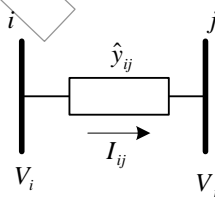
### 3.6 Modelación de la Red

En el estudio de flujo de potencia, se hace necesario simular cada elemento del sistema de potencia a través de su respectivo modelo equivalente, que para este caso son muy sencillos. Es importante mencionar que se pueden utilizar modelos equivalentes sencillos, cuando los cálculos lo permitan, debido a que no reviste ninguna ventaja utilizar una representación exacta de los elementos del sistema, cuando las cargas solo se conocen con una exactitud limitada. Análogamente los modelos exactos y complejos solo se limitan para objetivos muy especializados, donde la exactitud es clave, como en los estudios de estabilidad. Es frecuente en los estudios de flujo de carga, despreciar la resistencia con solo una pequeña pérdida de exactitud y un ahorro inmenso de cálculos.

- *Generadores.* Los generadores comúnmente en los estudios de flujo de carga se representan como fuentes de P-V ó P-Q. Los generadores se suelen representar por el voltaje interno en serie con la impedancia apropiada.
- *Líneas de Transmisión.* Las líneas de transporte poseen un modelo equivalente que depende de la longitud de la línea de transmisión; así las líneas cortas, cuya longitud es menor a 50 millas (80 Km.) se representan a través de una reactancia única serie; en cambio las líneas de transmisión largas de longitudes mayores a 200 millas (320 Km.), por lo general se modelan por un circuito Pi ( $\Pi$ ) equivalente. **NOTA:** Los cables también pueden ser representados por su modelo  $\Pi$ , pero con la impedancias apropiadas.
- *Transformadores.* En los estudios de flujo de carga es común representar el transformador por medio de su reactancia de cortocircuito en serie con un transformador ideal que toma en cuenta la posición del cambiador de tomas. En el caso del transformador de tres devanados en el que el terciario no tiene carga o posee una carga muy baja también se representa por la impedancia de cortocircuito.

### 3.7 Modelación del Sistema- Matriz de Admitancia ( $Y_{bus}$ )

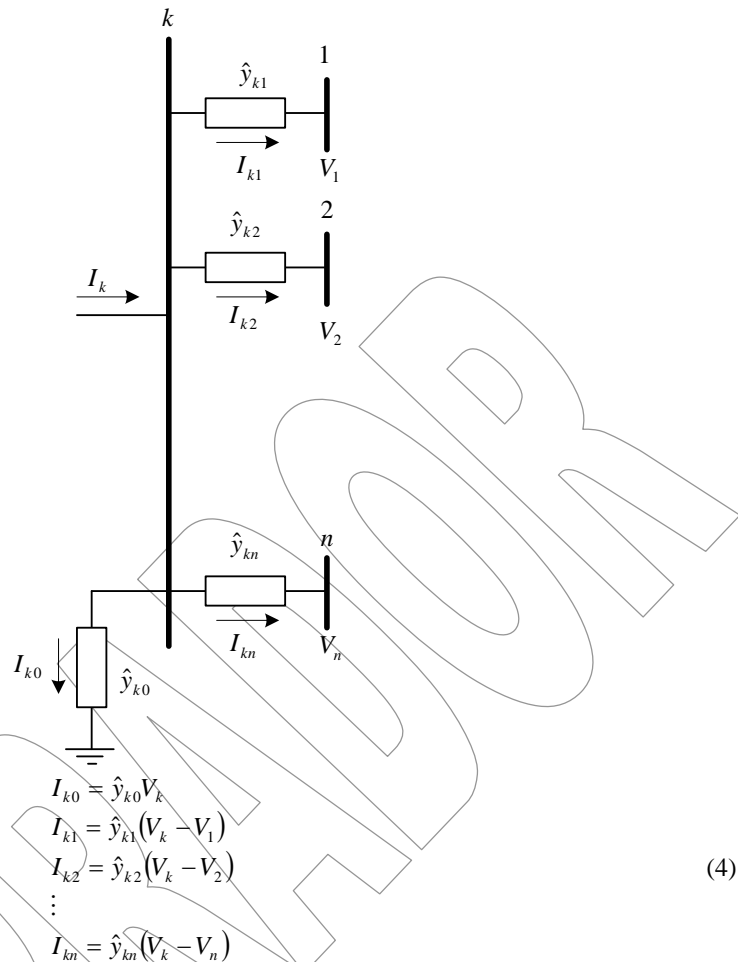
El análisis de barra consiste en establecer las ecuaciones de corriente de cada barra, considerando positiva las corrientes que llegan a la barra y negativa las que salen. Suponga un sistema que tiene  $n$  barras conectadas entre sí. Elijase dos barras adyacentes entre sí denotadas por los números  $i$  y  $j$ , entre las cuales se encuentra conectada una impedancia  $\hat{y}_{ij}$  y por donde fluye una corriente  $I_{ij}$ , de la barra  $i$  a la barra  $j$ .



entonces la ecuación de corriente entre dichas barras es:

$$I_{ij} = \frac{V_i - V_j}{\hat{z}_{ij}} = \hat{y}_{ij} (V_i - V_j) \quad (3)$$

Supóngase una barra genérica  $k$ -ésima, entonces:



siendo las  $I_{km}$  las corrientes que salen de la barra  $k$  hacia cierta barra  $m$ .

Supóngase que la corriente que entra a la barra  $k$  es  $I_k$ , entonces se puede plantear la ecuación de corriente en la barra  $k$  como sigue:

$$I_k = I_{k0} + I_{k1} + I_{k2} + \dots + I_{kn} \tag{5}$$

sustituyendo la definición de cada corriente resulta:

$$I_k = \hat{y}_{k0} V_k + \hat{y}_{k1} (V_k - V_1) + \hat{y}_{k2} (V_k - V_2) \dots + \hat{y}_{kn} (V_k - V_n) \tag{6}$$

finalmente esta ecuación puede ser reescrita de manera más compacta de la forma:

$$I_k = V_k \sum_{j=0}^n \hat{y}_{kj} - \sum_{j=1}^n \hat{y}_{kj} V_j \tag{7}$$

Nótese que el término:

$\sum_{j=0}^n \hat{y}_{kj} = Y_{kk}$  : representa la sumatoria de todas las admitancias conectadas al nodo  $k$  incluyendo cualquier admitancia Shunt.

$-\hat{y}_{kj} = Y_{kj} = Y_{kj}$  : Representa la admitancia mutua entre las barras  $k$  y  $j$ .

Se procede a reescribir la ecuación de la corriente en el nodo  $k$ :

$$I_k = V_k Y_{kk} + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n Y_{kj} V_j \quad (8)$$

Esta ecuación puede ser condensada como:

$$I_k = \sum_{j=1}^n Y_{kj} V_j \quad (9)$$

Esta ecuación representa la corriente  $I$  inyectada en la barra  $k$ ; nótese la salvedad que los límites de la sumatoria parte de 1 y termina en  $n$ .

Ahora para generalizar el estudio, supongamos que el sistema posee "n" barras, entonces se puede plantear la ecuaciones de las  $n$  barras por medio de:

$$\begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} & Y_{13} & \dots & Y_{1N} \\ Y_{21} & Y_{22} & Y_{23} & & Y_{2N} \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ & & & \ddots & \\ Y_{N1} & Y_{N2} & Y_{N3} & \dots & Y_{NN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ \vdots \\ V_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ \vdots \\ I_N \end{bmatrix} \quad (10)$$

$$\mathbf{I} = \mathbf{YV} \quad (11)$$

Siendo  $\mathbf{Y}$  la matriz admitancia de barra.

### 3.7.1. Característica de la Matriz Admitancia de Barra

La matriz admitancia de barra es una matriz muy peculiar producto de curiosidades matemáticas originadas por la naturaleza física de los elementos que constituyen el sistema, entre dichas características cabe destacar:

- La matriz admitancia de barra es una matriz cuadrada de orden  $n$  si el sistema posee  $n$  barras.
- La matriz es simétrica respecto a su diagonal principal, es decir:  $Y_{ij} = Y_{ji}$
- Los elementos de la diagonal principal de la matriz admitancia de barra son negativos, mientras que los elementos fuera de la diagonal son positivos.
- Si en el sistema no se desperdecía la resistencia, la matriz admitancia de barra es una matriz compleja.
- La matriz puede tener muchos elementos nulos ( $Y_{ij} = 0$ )
- Es una matriz singular, con determinante nulo y que no tiene inversa.

Se tiene que las corrientes de un sistema queda expresada por medio de su matriz de admitancia y vector de tensiones de barras.

$$\mathbf{I} = \mathbf{YV} \quad (11)$$

En el caso que la matriz de admitancia  $\mathbf{Y}$  no es singular se puede proceder por medio de:

$$\mathbf{V} = [\mathbf{Y}]^{-1} \mathbf{I} \quad (12)$$

Si la matriz de admitancia es singular (no posee inversa) se tiene que algunos métodos de estudios de flujo de carga requieren la inversa de la matriz de admitancia, y lo cual no es realizable.

El problema de la matriz de la matriz de admitancia no inversible es resuelto recordando que en los sistemas de  $m$  ecuaciones linealmente dependientes pueden resolverse haciendo la matriz de los coeficientes  $r < m$ . Habiendo en las  $m$  ecuaciones  $r$  linealmente independientes. En el caso de la matriz de admitancia de barra hay  $n$  ecuaciones por lo que la dimensión es de  $n \times n$  y el orden de la matriz de coeficientes es de  $n-1$  o sea  $n-1$  ecuaciones linealmente independientes. En principio cualquier ecuación puede ser eliminada, pero una elección conveniente permitiría una convergencia más rápida.

El procedimiento para eliminar la ecuación correspondiente a  $I_l$  :

$$I_l = Y_{l1} V_1 + Y_{l2} V_2 + \dots + Y_{ln} V_n \quad (13)$$



$$\begin{bmatrix} I_1 \\ \mathbf{I}' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_{11} & \mathbf{Y}_{1j} \\ \mathbf{Y}_{j1} & \mathbf{Y}' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ \mathbf{V}' \end{bmatrix} \quad (14)$$

Donde:

$$\mathbf{I}' = \begin{bmatrix} I_2 \\ I_3 \\ \vdots \\ I_n \end{bmatrix} \quad \mathbf{V}' = \begin{bmatrix} V_2 \\ V_3 \\ \vdots \\ V_n \end{bmatrix} \quad \mathbf{Y}_{1j} = \begin{bmatrix} Y_{12} \\ Y_{13} \\ \vdots \\ Y_{1n} \end{bmatrix} \quad \mathbf{Y}_{j1} = \begin{bmatrix} Y_{21} \\ Y_{23} \\ \vdots \\ Y_{n1} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{I}' = \mathbf{Y}_{j1}V_1 + \mathbf{Y}'\mathbf{V}' \quad (15)$$

lo escrito anterior representa un sistema de  $n-1$  ecuaciones con  $n-1$  incógnitas.

Se puede asignar un valor a una de las variables de manera que las demás queden expresadas en función de este. *Por ejemplo: Asumir que se conoce un valor de tensión en barra  $V_1$  (módulo y ángulo)*. El hecho de asumir el valor de una de las incógnitas es una solución que hace linealmente el sistema al mismo tiempo, y por lo general se puede asumir la tensión de una barra conocida, caso que es surge especialmente de suponer que dicha barra es una barra de oscilación o compensación (*slack bus*).

$$\mathbf{I}' - \mathbf{Y}_{j1}V_1 = \mathbf{Y}'\mathbf{V}' \quad (15)$$

$$\mathbf{I}'' = \mathbf{I}' - \mathbf{Y}_{j1}V_1$$

$$\mathbf{I}'' = \mathbf{Y}''\mathbf{V}'$$

donde finalmente :

$$\mathbf{V}' = [\mathbf{Y}']^{-1} \mathbf{I}''$$

### 3.8 Ecuaciones de Potencia

Suponga un nodo  $k$  que posee  $n$  barras conectadas y donde cada una de ellas posee una corriente orientada saliendo de la barra  $k$ , y una corriente única entrando a la barra  $k$  que puede ser escrita por:

$$I_k = V_k Y_{kk} + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n Y_{kj} V_j \quad (8)$$

La potencia que es inyectada a la barra  $k$  viene dada por:

$$S_k = V_k I_k^*$$

$$S_k^* = V_k^* I_k$$

$$S_k^* = V_k^* \left[ V_k Y_{kk} + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n Y_{kj} V_j \right] = P_k - jQ_k$$

Donde:

$$P_k = \text{Re} \left\{ V_k^* \left[ V_k Y_{kk} + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n Y_{kj} V_j \right] \right\}$$

Solo para ser empleado con objetivo de evaluación, o académicos. Prohibido la reproducción total o parcial de este documento.

$$Q_k = -\text{Im} \left\{ V_k^* \left[ V_k Y_{kk} + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n Y_{kj} V_j \right] \right\}$$

Se puede ver fácilmente que el voltaje de la barra  $k$ , puede ser escrito como:

$$V_k = \frac{1}{Y_{kk}} \left[ \frac{P_k - jQ_k}{V_k^*} + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n Y_{kj} V_j \right]$$

### 3.8.1. Coordenadas Cartesianas

Escribiendo las ecuaciones de potencia en coordenadas cartesianas resulta:

$$P_k - jQ_k = |V_k|^2 Y_{kk} + V_k \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n Y_{kj} V_j$$

Se supone que los elementos de voltaje y de la matriz admitancia de barra están expresados en forma coordenadas cartesianas de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} V_k &= a_k + jb_k & V_j &= a_j + jb_j \\ Y_{kk} &= G_{kk} - jB_{kk} & Y_{kj} &= G_{kj} - jB_{kj} \end{aligned}$$

realizando los cambios antes presentados :

$$P_k - jQ_k = |V_k|^2 (G_{kk} - jB_{kk}) + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n (G_{kj} a_j - jB_{kj} b_j) + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n b_k (G_{kj} b_j - jB_{kj} a_j) + (a_j + jb_j)$$

$$P_k = G_{kk} |V_k|^2 + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n (G_{kj} a_j + B_{kj} b_j) + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n b_k (G_{kj} b_j - B_{kj} a_j)$$

$$Q_k = B_{kk} |V_k|^2 + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n a_{kk} (B_{kj} a_j - G_{kj} b_j) + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n b_k (G_{kj} a_j + B_{kj} b_j)$$

### 3.8.2. Coordenadas Polares

Las ecuaciones de potencia en coordenadas polares pueden ser escritas por :

$$S_k^* = V_k^* \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n Y_{kj} V_j$$

Suponiendo:

$$\begin{aligned} V_k &= |V_k| \angle \delta_k & V_j &= |V_j| \angle \delta_j \\ Y_{kk} &= |Y_{kk}| \angle \theta_{kk} & Y_{kj} &= |Y_{kj}| \angle \theta_{kj} \end{aligned}$$

resulta :

$$P_k = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n |V_k| |V_j| |Y_{kj}| \cos(\theta_{kj} + \delta_j - \delta_k)$$

$$Q_k = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n |V_k| |V_j| |Y_{kj}| \operatorname{sen}(\theta_{kj} + \delta_j - \delta_k)$$

### 3.9 Características de las Ecuaciones de Flujo de Carga

Las ecuaciones de flujo de carga poseen una serie de características entre las que se pueden mencionar:

- Las ecuaciones de flujo de potencia son *no lineales* por que no se pueden obtener relaciones analíticas directas para su solución, siendo necesario utilizar métodos numéricos.
- Las ecuaciones de potencias son de tipo algebraicas, esto es consecuencia de considerar que el sistema de potencia se encuentra operando en condiciones estables de carga.
- La solución de las ecuaciones de flujo de carga debe satisfacer la condición energética del sistema, esto es :

$$\begin{aligned} \sum P_{gen} &= \sum P_{load} + losses_p \\ \sum Q_{gen} &= \sum Q_{load} + losses_p \end{aligned}$$

donde  $P_{gen}$  y  $Q_{gen}$ , son las potencias generadas y  $P_{load}$  y  $Q_{load}$  las potencias de carga.

- Los flujos de potencia en los enlaces (Líneas de transmisión) son función de las tensiones en las barras y del ángulo ( $\delta_j - \delta_k$ ) el cual es el ángulo de transmisión y de carga.
- En el estudio de flujo de carga se observan tres (3) clases de variables:
  - *Variables no controlables*: aquellas que dependen de los usuarios, tales como las potencias de las cargas  $P_{load}$  y  $Q_{load}$ .
  - *Variables de Control (independientes)*: son aquellas que pueden ser sujetas a manipulaciones para el control efectivo y económico del sistema de potencia. Las potencias generadas  $P_{gen}$  y  $Q_{gen}$  son las variables controlables.
  - *Variables dependientes*: estas son las variables que dependen de las variaciones de la potencia, como lo son los valores de tensión en las partes del sistema de potencia en módulo y ángulo.

### 3.10 Métodos Numéricos para la resolución de Ecuaciones No Lineales

Un problema muy común en el estudio de la ingeniería es encontrar un valor de  $x$  que satisfaga la ecuación  $f(x)=0$ . En la mayoría de los casos  $f$  es una función conocida, real de una variable, y  $f$  casi siempre es continua de hecho una o dos veces diferenciables. Dada una función  $f(x)$  real, cualquier valor numérico  $r$  que satisfaga que  $f(x=r)=0$ , recibe el nombre de solución o cero o raíz.

La función  $f(x)$  puede ser de cualquier tipo no lineal.

Por ejemplo :

$$(1) 1 + 4x - 16x^2 + 3x^3 + 4x^4 = 0$$

$$(2) \tan(x) = \tanh(2x)$$

La primera es un ejemplo de una ecuación polinomial, la segunda un ejemplo de una ecuación trascendental.

La principal razón para resolver las ecuaciones no lineales por medio de métodos numéricos es que estas ecuaciones carecen de una solución exacta, excepto para muy pocos problemas. La solución analítica de las ecuaciones polinomiales existe hasta cuarto orden, pero no existen soluciones exactas para órdenes superiores. Por lo tanto las raíces de esas ecuaciones no lineales se obtienen mediante métodos numéricos basados en *procesos iterativos*.

Los métodos numéricos iterativos, son métodos que realizan la aproximación de un problema a través de una sucesión infinita de aproximaciones que deben converger a un valor único que es la solución del problema. En general estos métodos consisten en asignar unos valores de arranque a las variables y mediante las

ecuaciones iterativas establecer los nuevos valores de las variables (iteración), estas ecuaciones dependen del proceso y el problema y se repite el proceso hasta que las variables se encuentren dentro de un cierto rango específico de error.

Los métodos numéricos iterativos están diseñados para encontrar las raíces son poderosos, aunque cada uno tiene sus propias limitaciones y defectos. Entre los métodos de resolución de ecuaciones no lineales se tienen los métodos de : *Bisección, Falsa Posición, Falsa Posición Modificada, Método de Newton, Método de la Secante, Sustitución Sucesiva, Método de Baristow, Método del Descenso más Rápido, etc.*

En lo siguiente se presentan los métodos iterativos de mayor divulgación en la resolución de las ecuaciones de flujo de carga, esto métodos son:

- Método de Gauss-Jacobi.
- Método de Gauss-Seidel.
- Método de Newton-Raphson o método del Gradiente.

El método de Gauss-Seidel ha sido ampliamente utilizado por muchos años y resulta muy sencillo de aplicar; mientras que el método de Newton-Raphson aunque es más complejo tiene ciertas ventajas. La velocidad de convergencia de los métodos es de extrema importancia puesto que el costo de tiempo de cálculo, el empleo estos métodos en esquemas para el control automático del sistema de potencia requiere soluciones muy rápidas de los flujos de carga.

### 3.10.1. Método Iterativo de Gauss-Jacobi

Supóngase un sistema de  $n$  ecuaciones algebraicas no lineales con  $n$  incógnitas  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  de la forma :

$$\begin{cases} F_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \\ F_2(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \\ \vdots \\ F_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \end{cases}$$

Se procede a re-plantear el problema, despejando de cada ecuación una de las variables, creándose las funciones:

$$\begin{cases} x_1 = \phi_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ x_2 = \phi_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \vdots \\ x_n = \phi_n(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{cases}$$

donde las funciones  $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n$  son las funciones resultantes de despejar de  $i$ -ésima variable de la  $i$ -ésima ecuación; es decir se obtienen las ecuaciones iterativas. Se suponen una condición inicial para cada una de las incógnitas del problema.

$$\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} x_1^0 \\ x_2^0 \\ \vdots \\ x_n^0 \end{bmatrix}$$

Partiendo de estos valores iniciales se proceden a encontrar los siguientes por el uso de las ecuaciones iterativas:

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = \phi_1(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_n^{(k)}) \\ x_2^{(k+1)} = \phi_2(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_n^{(k)}) \\ \vdots \\ x_n^{(k+1)} = \phi_n(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_n^{(k)}) \end{cases}$$

El superíndice  $x_n^{(k+1)}$ , solo indica el número de la aproximación que se está calculando y nótese especialmente que las ecuaciones iterativas calculan los nuevos valores a partir de los valores que previamente han sido calculados. La sucesión convergente de valores de las incógnitas  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , es infinita, pero esta puede ser detenida bajo algún criterio lógico posible. Un criterio posible para detener el proceso iterativo, es encontrar una medida del error cometido entre dos iteraciones consecutivas, y poseer una cota superior a dicho valor, para el cual el proceso es detenido:

$$\|x^{(k+1)} - x^{(k)}\| \leq \varepsilon$$

siendo  $\varepsilon$ , la cota superior del error previamente fijada.

### 3.10.2. Método Iterativo de Gauss-Seidel

El método de Gauss-Seidel es una mejora del método de Gauss-Jacobi, parte en el hecho de en utilizar para el cálculo de las variables es los valores obtenidos en la iteración inmediata con la que se logra una convergencia más rápida. Supóngase un sistema de  $n$  ecuaciones algebraicas no lineales con  $n$  incógnitas ( $x_1, x_2, \dots, x_n$ ) de la forma :

$$\begin{cases} F_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \\ F_2(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \\ \vdots \\ F_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \end{cases}$$

Se procede a re-plantea el problema, despejando de cada ecuación una de las variables, creándose las funciones:

$$\begin{cases} x_1 = \phi_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ x_2 = \phi_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \vdots \\ x_n = \phi_n(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{cases}$$

donde las funciones  $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n$  son las funciones resultantes de despejar de  $i$ -ésima variable de la  $i$ -ésima ecuación; es decir se obtienen las ecuaciones iterativas. Se suponen una condición inicial para cada una de las incógnitas del problema.

$$\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} x_1^0 \\ x_2^0 \\ \vdots \\ x_n^0 \end{bmatrix}$$

Partiendo de estos valores iniciales se proceden a encontrar los siguientes por el uso de las ecuaciones iterativas:

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = \phi_1(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_n^{(k)}) \\ x_2^{(k+1)} = \phi_2(x_1^{(k+1)}, x_2^{(k)}, \dots, x_n^{(k)}) \\ x_3^{(k+1)} = \phi_3(x_1^{(k+1)}, x_2^{(k+1)}, \dots, x_n^{(k)}) \\ \vdots \\ x_n^{(k+1)} = \phi_n(x_1^{(k+1)}, x_2^{(k+1)}, \dots, x_{n-1}^{(k+1)}, x_n^{(k)}) \end{cases}$$

El método iterativo de Gauss-Seidel posee una convergencia más rápida que el método de Gauss-Jacobi, pero la naturaleza del método iterativo es crear una sucesión infinita de valores, que debe ser detenida por algún criterio, es común verificar luego de cada iteración el error cometido en esta contra la anterior, si el error entre dos iteraciones consecutivas es menor a una cota superior  $\varepsilon$  se detiene el proceso iterativo.

$$\|x^{(k+1)} - x^{(k)}\| \leq \varepsilon$$

### 3.10.3. Método de Newton-Raphson

Aunque el método de Gauss-Seidel está bien establecido, más recientemente se ha prestado mucha atención al método de Newton-Raphson. Con algunos sistemas de una mayor seguridad de convergencia y al mismo tiempo más económico en tiempo de cálculo. La mayoría de los programas comienzan con el método iterativo de Gauss-Seidel para obtener un buen valor inicial de las variables para el método de Newton-Raphson. Supóngase un sistema de  $n$  ecuaciones algebraicas no lineales con  $n$  incógnitas ( $x_1, x_2, \dots, x_n$ ) de la forma :

$$\begin{cases} F_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = c_1 \\ F_2(x_1, x_2, \dots, x_n) = c_2 \\ \vdots \\ F_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = c_n \end{cases}$$

donde :  $c_1, c_2, \dots, c_n$  son constantes conocidas. Se puede crear un vector de incógnitas:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

entonces las  $n$  ecuaciones pueden ser compactadas escribiendo:

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{c}$$

Si las ecuaciones poseen solución, entonces debe existir un vector solución  $\alpha$  cuyas componentes son:

$$\alpha = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix}$$

Esta solución debe satisfacer que  $f_i(\alpha_i) = c_i$ . Para llegar a una solución numérica del problema se parte de un conjunto inicial de valores conocidos de las incógnitas.

$$\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} x_1^0 \\ x_2^0 \\ \vdots \\ x_n^0 \end{bmatrix}$$

y mediante un algoritmo conocido como el método de Newton-Raphson, se trata de obtener valores cada vez más cercanos a la solución  $\alpha$ . La expansión de Taylor de dos o más variables es la base del método de Newton-Raphson. Las derivadas parciales de orden superior a uno se desprecian en la serie de términos de la expansión de Taylor. Si las funciones  $\mathbf{f}(\mathbf{x})$  son diferenciables se puede escribir la diferencia entre el valor real y el valor calculado mediante la expansión de la serie de Taylor despreciando los términos de derivadas mayor a uno.

$$f_i(\alpha_i) - f_i(x_i^0) = \Delta c_i^{(0)} = \frac{\partial f_i}{\partial x_1} \Delta x_1 + \frac{\partial f_i}{\partial x_2} \Delta x_2 + \dots + \frac{\partial f_i}{\partial x_n} \Delta x_n$$

Evidentemente, el hecho de despreciar las derivadas de orden superior introducen un error en esta aproximación.

$$\Delta c_i^{(0)} = \frac{\partial f_i}{\partial x_1} \Delta x_1 + \frac{\partial f_i}{\partial x_2} \Delta x_2 + \dots + \frac{\partial f_i}{\partial x_n} \Delta x_n$$

donde :  $\Delta c_i^{(0)} = c_i - c_i^{(0)}$

$$\Delta c_i^{(0)} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \Delta x_j$$

si se admiten todas las derivadas conocidas, entonces se crea un sistema de ecuaciones lineales.

$$\Delta \mathbf{C}^{(0)} = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \Delta \mathbf{x}^{(0)}$$

Resolviendo lo anterior por  $\Delta \mathbf{x}^{(0)}$ , se obtienen el incremento a añadir a la variable para acercarnos a la solución:

$$\mathbf{x}^{(1)} = \mathbf{x}^{(0)} + \Delta \mathbf{x}^{(0)}$$

Una vez se tiene el valor de  $\mathbf{x}^{(1)}$ , se tomo como referencia para la segunda iteración.

$$\Delta \mathbf{C}^{(1)} = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \Delta \mathbf{x}^{(1)}$$

Entonces se procede a calcular el nuevo valor

$$\mathbf{x}^{(2)} = \mathbf{x}^{(1)} + \Delta \mathbf{x}^{(1)}$$

El proceso de Newton-Raphson puede ser escrito por

$$\Delta \mathbf{C}^{(k)} = \mathbf{J}^{(k)} \Delta \mathbf{x}^{(k)}$$

donde :  $J$  representa una matriz de  $n \times n$  elementos denominada Jacobiano, cada elemento de la matriz corresponde a las posibles derivadas de las funciones respecto a todas las variables.

$$\Delta \mathbf{x}^{(k)} \Delta \mathbf{C}^{(k)} = [\mathbf{J}^{(k)}]^{-1} \Delta \mathbf{C}^{(k)}$$

$$\Delta \mathbf{c} = \mathbf{c} - \mathbf{c}^{(0)}$$

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} + \Delta \mathbf{x}^{(k)}$$

Este método también conocido como el método de Newton, encuentra una raíz siempre que se conozca una estimación para la raíz deseada. Utiliza restas tangentes que se evalúan analíticamente. Este método se obtiene de la expansión de Taylor. El método de Newton utiliza de forma iterativa las rectas tangentes que pasan por las aproximaciones consecutivas de la raíz. El método requiere una buena estimación inicial. De otro modo, la solución iterativa puede diverger o converger a una solución irrelevante. La razón de convergencia iterativa del método de Newton es alta, cuando funciona.

### 3.11 Método de Solución para los Estudios de Flujo de Potencia

El método a utilizar para resolver el problema de flujo de potencia depende de las características del sistema, del tamaño del sistema, etc. En general el procedimiento preliminar es igual sin importar el método seleccionado:

- Se procede a numerar todas y cada una de las barras del sistema desde 1 hasta n.
- Se procede a plantear todas las ecuaciones que definen el comportamiento de los flujos de potencia del sistema recordando
  - (\*) Las barras P-Q requieren de dos (2) ecuaciones.
  - (\*\*) Las barras P-V requieren de una (1) ecuación.
  - (\*\*\*) Las barras oscilantes (*slack bus*) no generan ecuaciones.

### 3.12 Método de Gauss-Jacobi en Estudios de Flujo de Potencia

El método de Gauss-Jacobi, corresponde al método más simple para la resolución de las ecuaciones de flujo de carga,

#### Barra P-Q

En este tipo de barras, se especifican las potencias activas  $P$  y reactiva  $Q$ , por lo que para analizar esta barra solo se requiere determinar el módulo y ángulo de la tensión de la barra. Para determinar los voltajes de esta barra se aplica la ecuación genérica:

$$V_k^{(i+1)} = \frac{1}{Y_{kk}} \left[ \frac{P_k - jQ_k}{[V_k^{(i)}]^*} + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n Y_{kj} V_j^{(i)} \right]$$

Para las barras de tipo  $P-Q$ , se utiliza el valor de los voltajes calculados en la iteración anterior para calcular los valores de la iteración siguiente.

*Barras P-V*

En las barras  $P-V$ , se requiere calcular el valor de la potencia reactiva  $Q_k$ , utilizando para las tensiones en las barras las calculadas en la ecuación anterior:

$$Q_k^{(i+1)} = -\text{Im} \left[ \left( V_k^{(i)} \right)^* \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n Y_{kj} V_j^{(i)} \right]$$

Luego se procede a calcular el perfil de voltajes  $V_k$  por medio de:

$$V_k^{(i+1)} = \frac{1}{Y_{kk}} \left[ \frac{P_k - jQ_k}{[V_k^{(i)}]^*} + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n Y_{kj} V_j^{(i)} \right]$$

*Barra de Compensación o Barra Oscilantes (Slack bus)*

Este tipo de barra no requiere ningún cálculo debido a que no aporta incógnitas, por el contrario aporta información para el flujo de potencia, y es la barra que entrega además de la potencia, las pérdidas del sistema.

### 3.13 Método de Gauss-Seidel en Estudios de Flujo de Potencia

Las diferencias en el tipo de datos especificados en cada barra, produce una tremenda complejidad en la solución formal de las ecuaciones de cargas de los sistema de potencia. Aunque no es difícil resolver las ecuaciones de cargas, encontrar una solución exacta es un problema matemático complejo. En general el método para resolver los flujos de carga parte de estimar a partir de los valores conocidos inicialmente de tensiones de barras y potencias activas y reactivas, las cuales por el método de Gauss-Seidel son mejorados sucesivamente., el cálculo de un nuevo conjunto de voltajes recibe el nombre de iteración. Los procesos iterativos son infinitos por naturaleza, pero pueden ser detenidos cuando los cambios de valores de las tensiones de las barras entre un cálculo y otro son menores que un valor mínimo especificado. Para emplear el método de Gauss-Seidel, se debe tener presente el tipo de barra que se encuentra en el sistema de potencia.

*Barra P-Q*

En este tipo de barras, se conoce la potencia activa  $P$  y reactiva  $Q$  totales que se inyectan a la barra. En las barras  $P-Q$ , la incógnita es la tensión en módulo y ángulo de la barra, que pueden ser encontrados bajo la siguiente ecuación:

$$V_k^{(i+1)} = \frac{1}{Y_{kk}} \left[ \frac{P_k - jQ_k}{[V_k^{(i)}]^*} + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n Y_{kj} V_j^{(i)} \right]$$

Se debe discriminar que esta ecuación, para que se cumpla el método iterativo de Gauss-Seidel, la sumatoria debe ser ordenadamente empleada :

$$V_k^{(i+1)} = \frac{1}{Y_{kk}} \left[ \frac{P_k - jQ_k}{[V_k^{(i)}]^*} + \sum_{j=1}^{k-1} Y_{kj} V_j^{(i+1)} + \sum_{j=k+1}^n Y_{kj} V_j^{(i)} \right]$$

$j < k$  :  $V_j$  utilizado es  $V_j^{(i+1)}$

$j > k$  :  $V_j$  utilizado es  $V_j^{(i)}$

Los valores de  $P_k$  y  $Q_k$  son las potencias activas y reactivas totales inyectadas en cada barra, pudiéndose decir, que si la barra posee potencia generado y de carga se satisface :



$$P_k = P_{genk} - P_{loadk}$$

$$Q_k = Q_{genk} - Q_{loadk}$$

siendo :  $P_{genk}, Q_{genk}$  : las potencias generados y  $P_{loadk}, Q_{loadk}$  las potencias de carga.

Luego de cada iteración los valores de los voltajes de las barras, son mejorados sucesivamente, pero para cada iteración se verifica la convergencia, verificando la distancia entre dos valores calculados consecutivos:

$$\|V^{(k+1)} - V^{(k)}\| \leq \epsilon$$

**Barra P-V**

En estas barras es conocida la potencia activa total inyectada a la barra y el módulo de la tensión, pero se desconoce la potencia reactiva total inyectada  $Q_k$ . Por tanto, se hace necesario determinar inicialmente la potencia reactiva total inyectada, para lo cual también se utiliza un proceso iterativo:

$$Q_k^{(i+1)} = -\text{Im} \left[ \left( V_k^{(i)} \right)^* \left( \sum_{j=1}^{k-1} Y_{kj} V_j^{(i+1)} + \sum_{j=k+1}^n Y_{kj} V_j^{(i)} \right) \right]$$

donde para :

$j < k$  :  $V_j$  utilizado es  $V_j^{(i+1)}$

$j > k$  :  $V_j$  utilizado es  $V_j^{(i)}$

Luego de calcular la potencia reactiva total inyectada  $Q_k$ , se procede a determinar el voltaje de la barra  $V_k$  :

$$V_k^{(i+1)} = \frac{1}{Y_{kk}} \left[ \frac{P_k - jQ_k}{[V_k^{(i)}]^2} + \sum_{j=1}^{k-1} Y_{kj} V_j^{(i+1)} + \sum_{j=k+1}^n Y_{kj} V_j^{(i)} \right]$$

donde para

$j < k$  :  $V_j$  utilizado es  $V_j^{(i+1)}$

$j > k$  :  $V_j$  utilizado es  $V_j^{(i)}$

el resultado del calculo es una tensión con módulo y ángulo. Para la iteración  $i$  se tiene:

$$|V_k^{(i)}|^2 = [a_k^{(i)}]^2 + [b_k^{(i)}]^2$$

$$|V_k^{(i)}| = \sqrt{[a_k^{(i)}]^2 + [b_k^{(i)}]^2}$$

pero se conoce que en las barra P-V, el módulo del voltaje de la barra es un dato.

$$|V_k| = \frac{|V_k^{(i+1)}| |V_k|}{|V_k^{(i)}|}$$

$$|V_k| = \sqrt{\left[ \frac{a_k^{(i)}}{|V_k^{(i)}|} \right]^2 + \left[ \frac{b_k^{(i)}}{|V_k^{(i)}|} \right]^2}$$

Por tanto, los valores a utilizar en la siguiente iteración ( $i+1$ ) están afectados por un factor  $f$ :

$$f = \frac{|V_k|}{|V_k^{(i)}|}$$

entonces los nuevos valores para la tensión vienen dados por:

$$\begin{aligned}fa_k^{(i)} &= a_k^{(i+1)} \\fb_k^{(i)} &= b_k^{(i+1)} \\|V_k^{(i)}|^2 &= \left[ a_k^{(i)} \right]^2 + \left[ b_k^{(i)} \right]^2\end{aligned}$$

#### Barra de Compensación o Oscilantes (Slack Bus)

Esta barra se especifica en módulo y ángulo de la tensión en la barra, por lo que no contribuye con incógnitas. Las barras oscilantes no ameritan cálculo alguno.

**NOTA:** Una vez que se conoce la tensión en todas las barras se puede determinar la corriente en los enlaces y los flujos de potencia. Suponga dos barras denotadas  $i$  y  $j$  respectivamente, separadas por una línea de transmisión de admitancia  $Y_{ij}$ , entonces la corriente que circula por dicha línea es:

$$\begin{aligned}I_{ij} &= Y_{ij}(V_i - V_j) \\S_{ij} &= V_i I_{ij}^* \\P_{ij} &= \text{Re}\{V_i I_{ij}^*\} \\Q_{ij} &= \text{Im}\{V_i I_{ij}^*\}\end{aligned}$$

### 3.14 Método de Newton-Raphson en Estudios de Flujo de Potencia

El método de Newton-Raphson, requiere un especial interés, debido a que su implementación es un poco más compleja que la de los métodos iterativos de Gauss-Seidel y Gauss-Jacobi.

#### 3.14.1. Coordenadas Rectangulares

En las ecuaciones de potencia en coordenadas rectangulares ( $P_k$  y  $Q_k$ ) se observa que para cada barra, se tienen como incógnitas la parte real y la parte imaginaria de la tensión en la barra ( $a_k$  y  $b_k$ ). Para la aplicación del método de Newton-Raphson, es necesario conocer el valor de la función como una constante.

$$\begin{aligned}\mathbf{c} - \mathbf{c}^{(i)} &= [\mathbf{J}^{(i)}] \Delta \mathbf{x}^{(i)} \\ \Delta \mathbf{c} &= \mathbf{c} - \mathbf{c}^{(0)}\end{aligned}$$

#### Barra de Tipo P-Q

En estas barras las variables serán la parte real e imaginaria de la tensión. En el caso de las barras P-V la potencia total inyectada a la barra y el módulo de la tensión son conocidos. Por tanto, las ecuaciones requeridas son:

$$P_k = G_{kk}|V_k|^2 + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n (G_{kj}a_j + B_{kj}b_j) + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n b_k (G_{kj}b_j - B_{kj}a_j)$$

$$Q_k = B_{kk}|V_k|^2 + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n a_{kk} (B_{kj}a_j - G_{kj}b_j) + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n b_k (G_{kj}a_j + B_{kj}b_j)$$

$$|V_k^{(i)}| = \sqrt{\left[ a_k^{(i)} \right]^2 + \left[ b_k^{(i)} \right]^2}$$

Para los cálculos en el estudio de flujo de potencia se tiene:

$$\mathbf{c} - \mathbf{f}(\mathbf{x}^{(i)}) = \Delta \mathbf{P} \text{ o } \Delta \mathbf{Q} \text{ o } \Delta |V|^2$$

Donde:

$$\Delta P_k = P_k^{esp} - P_k^{calc}$$

$$\Delta Q_k = Q_k^{esp} - Q_k^{calc}$$

$$\Delta |V_k|^2 = [V_k^{esp}]^2 - [V_k^{calc}]^2$$

donde

$P_k^{esp}$  : Potencia activa total inyectada en la barra  $k$  especificada (barra PQ ó PV).

$P_k^{calc}$  : Potencia calculada.

$Q_k^{esp}$  : Potencia reactiva total inyectada en la barra  $k$  especificada (barra PQ).

$Q_k^{calc}$  : Potencia reactiva calculada.

$|V_k^{esp}|$  : Módulo el voltaje especificado (barra PV).

$|V_k^{calc}|$  : Módulo del voltaje calculado.

En el caso de un sistema de  $n$  barras, el problema consta de  $(2n-1)$  ecuaciones con  $(n-1)$  incógnitas. En el estudio de flujo de carga siempre es preciso que una barra del sistema sea del tipo oscilante o de compensación.

Suponga que la barra 1 es la barra de compensación (*slack bus*) y que de las  $n$  barras del sistema  $p$  son del tipo PV. El sistema de ecuaciones de flujo de carga que pueden ser planteadas resulta ser:

$$\Delta P_2 = \frac{\partial P_2}{\partial a_2} \Delta a_2 + \frac{\partial P_2}{\partial a_3} \Delta a_3 + \dots + \frac{\partial P_2}{\partial a_n} \Delta a_n + \frac{\partial P_2}{\partial b_2} \Delta b_2 + \frac{\partial P_2}{\partial b_3} \Delta b_3 + \dots + \frac{\partial P_2}{\partial b_n} \Delta b_n$$

$$\Delta P_3 = \frac{\partial P_3}{\partial a_2} \Delta a_2 + \frac{\partial P_3}{\partial a_3} \Delta a_3 + \dots + \frac{\partial P_3}{\partial a_n} \Delta a_n + \frac{\partial P_3}{\partial b_2} \Delta b_2 + \frac{\partial P_3}{\partial b_3} \Delta b_3 + \dots + \frac{\partial P_3}{\partial b_n} \Delta b_n$$

⋮

$$\Delta P_n = \frac{\partial P_n}{\partial a_2} \Delta a_2 + \frac{\partial P_n}{\partial a_3} \Delta a_3 + \dots + \frac{\partial P_n}{\partial a_n} \Delta a_n + \frac{\partial P_n}{\partial b_2} \Delta b_2 + \frac{\partial P_n}{\partial b_3} \Delta b_3 + \dots + \frac{\partial P_n}{\partial b_n} \Delta b_n$$

$$\Delta Q_2 = \frac{\partial Q_2}{\partial a_2} \Delta a_2 + \frac{\partial Q_2}{\partial a_3} \Delta a_3 + \dots + \frac{\partial Q_2}{\partial a_n} \Delta a_n + \frac{\partial Q_2}{\partial b_2} \Delta b_2 + \frac{\partial Q_2}{\partial b_3} \Delta b_3 + \dots + \frac{\partial Q_2}{\partial b_n} \Delta b_n$$

$$\Delta Q_3 = \frac{\partial Q_3}{\partial a_2} \Delta a_2 + \frac{\partial Q_3}{\partial a_3} \Delta a_3 + \dots + \frac{\partial Q_3}{\partial a_n} \Delta a_n + \frac{\partial Q_3}{\partial b_2} \Delta b_2 + \frac{\partial Q_3}{\partial b_3} \Delta b_3 + \dots + \frac{\partial Q_3}{\partial b_n} \Delta b_n$$

⋮

$$\Delta Q_n = \frac{\partial Q_n}{\partial a_2} \Delta a_2 + \frac{\partial Q_n}{\partial a_3} \Delta a_3 + \dots + \frac{\partial Q_n}{\partial a_n} \Delta a_n + \frac{\partial Q_n}{\partial b_2} \Delta b_2 + \frac{\partial Q_n}{\partial b_3} \Delta b_3 + \dots + \frac{\partial Q_n}{\partial b_n} \Delta b_n$$

$$\Delta |V_k|^2 = \frac{\partial |V_k|^2}{\partial a_2} \Delta a_2 + \frac{\partial |V_k|^2}{\partial a_3} \Delta a_3 + \dots + \frac{\partial |V_k|^2}{\partial a_n} \Delta a_n + \frac{\partial |V_k|^2}{\partial b_2} \Delta b_2 + \frac{\partial |V_k|^2}{\partial b_3} \Delta b_3 + \dots + \frac{\partial |V_k|^2}{\partial b_n} \Delta b_n$$

⋮

$$\Delta |V_h|^2 = \frac{\partial |V_h|^2}{\partial a_2} \Delta a_2 + \frac{\partial |V_h|^2}{\partial a_3} \Delta a_3 + \dots + \frac{\partial |V_h|^2}{\partial a_n} \Delta a_n + \frac{\partial |V_h|^2}{\partial b_2} \Delta b_2 + \frac{\partial |V_h|^2}{\partial b_3} \Delta b_3 + \dots + \frac{\partial |V_h|^2}{\partial b_n} \Delta b_n$$

Nótese que la primera barra PQ es la 2 y la última es la  $j$  y la primera barra PV es la  $k$  y la última es la  $h$ . Este sistema de ecuaciones puede ser escrito en forma matricial, denotado por:

$$\begin{bmatrix} \Delta P \\ \Delta P \\ \Delta |V|^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_1 & J_2 \\ J_3 & J_4 \\ J_4 & J_6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta a \\ \Delta b \end{bmatrix}$$

Expresiones genéricas de cada sub-matriz del Jacobiano  $\mathbf{J}_1, \dots, \mathbf{J}_6$  pueden ser encontradas.

$\mathbf{J}_1$ :

$$\frac{\partial P_k}{\partial a_k} = 2a_k G_{kk} + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n (G_{kj} a_j + B_{kj} b_j)$$

$$\frac{\partial P_k}{\partial a_j} = a_k G_{kj} - B_{kj} b_k$$

$\mathbf{J}_2$ :

$$\frac{\partial P_k}{\partial b_k} = 2b_k G_{kk} + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n (G_{kj} b_j - B_{kj} a_j)$$

$$\frac{\partial P_k}{\partial b_j} = a_k B_{kj} + G_{kj} b_k$$

$\mathbf{J}_3$ :

$$\frac{\partial Q_k}{\partial a_k} = 2a_k B_{kk} + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n (B_{kj} a_j - G_{kj} b_j)$$

$$\frac{\partial Q_k}{\partial a_j} = a_k B_{kj} + G_{kj} b_k$$

$\mathbf{J}_4$ :

$$\frac{\partial Q_k}{\partial b_k} = 2b_k B_{kk} + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n (G_{kj} a_j - B_{kj} b_j)$$

$$\frac{\partial Q_k}{\partial b_j} = b_k B_{kj} - G_{kj} a_k$$

$\mathbf{J}_5$ :

$$\frac{\partial |V_k|^2}{\partial a_k} = 2a_k$$

$$\frac{\partial |V_k|^2}{\partial a_j} = 0$$

$\mathbf{J}_6$ :

$$\frac{\partial |V_k|^2}{\partial b_k} = 2b_k$$

$$\frac{\partial |V_k|^2}{\partial b_j} = 0$$

### 3.14.2. Coordenadas Polares

Cuando se escriben las ecuaciones de flujo de carga para un sistema en coordenadas polares estas resultan ser:

$$V_k = |V_k| \angle \delta_k \quad V_j = |V_j| \angle \delta_j$$

$$Y_{kk} = |Y_{kk}| \angle \theta_{kk} \quad Y_{kj} = |Y_{kj}| \angle \theta_{kj}$$

Resulta :

$$P_k = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n |V_k| |V_j| |Y_{kj}| \cos(\theta_{kj} + \delta_j - \delta_k)$$

$$Q_k = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n |V_k| |V_j| |Y_{kj}| \text{sen}(\theta_{kj} + \delta_j - \delta_k)$$

Obsérvese que:

$$(\theta_{kj} + \delta_j - \delta_k) = -(\theta_{kj} + \delta_j - \delta_k)$$

*Barras PQ*

Se encuentran especificadas la potencia activa y reactiva inyectada a la barra ( $P_k, Q_k$ ), cumpliéndose que

$$P_k = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n |V_k| |V_j| |Y_{kj}| \cos(\theta_{kj} + \delta_j - \delta_k) = f_k(\mathbf{x})$$

$$Q_k = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n |V_k| |V_j| |Y_{kj}| \text{sen}(\theta_{kj} + \delta_j - \delta_k) = g_k(\mathbf{x})$$

en el caso de los sistemas de potencia el vector  $x$  se transforma en:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ \vdots \\ V_n \\ \delta_1 \\ \delta_2 \\ \vdots \\ \delta_n \end{bmatrix}$$

Bajo esta nueva nomenclatura, el flujo de potencia puede ser escrito por:

$$\begin{bmatrix} \Delta P \\ \Delta Q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_1 & \mathbf{J}_2 \\ \mathbf{J}_3 & \mathbf{J}_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta V \\ \Delta \delta \end{bmatrix}$$

Donde:

$$\mathbf{J}_1 = \begin{bmatrix} \frac{\partial P_1}{\partial V_1} & \dots & \frac{\partial P_1}{\partial V_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial P_n}{\partial V_1} & \dots & \frac{\partial P_n}{\partial V_n} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{J}_2 = \begin{bmatrix} \frac{\partial P_1}{\partial \delta_1} & \dots & \frac{\partial P_1}{\partial \delta_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial P_n}{\partial \delta_1} & \dots & \frac{\partial P_n}{\partial \delta_n} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{J}_3 = \begin{bmatrix} \frac{\partial Q_1}{\partial V_1} & \dots & \frac{\partial Q_1}{\partial V_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial Q_n}{\partial V_1} & \dots & \frac{\partial Q_n}{\partial V_n} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{J}_4 = \begin{bmatrix} \frac{\partial Q_1}{\partial \delta_1} & \dots & \frac{\partial Q_1}{\partial \delta_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial Q_n}{\partial \delta_1} & \dots & \frac{\partial Q_n}{\partial \delta_n} \end{bmatrix}$$

Se pueden encontrar expresiones genéricas para las submatrices del Jacobiano :

**J<sub>1</sub>:**

$$\frac{\partial P_k}{\partial V_k} = 2|V_k|Y_{kk} \cos \theta_{kk} + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n |V_k|Y_{kj} \cos(\delta_k - \delta_j - \theta_{kj})$$

$$\frac{\partial P_k}{\partial V_j} = |V_k|Y_{kj} \cos(\delta_k - \delta_j - \theta_{kj})$$

**J<sub>2</sub>:**

$$\frac{\partial P_k}{\partial \delta_k} = -\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n |V_k||V_j|Y_{kj} \text{sen}(\delta_k - \delta_j - \theta_{kj})$$

$$\frac{\partial P_k}{\partial \delta_j} = |V_k||V_j|Y_{kj} \text{sen}(\delta_k - \delta_j - \theta_{kj})$$

**J<sub>3</sub>:**

$$\frac{\partial Q_k}{\partial V_k} = -2|V_k|Y_{kk} \text{sen} \theta_{kk} + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n |V_k|Y_{kk} \text{sen}(\delta_k - \delta_j - \theta_{kj})$$

$$\frac{\partial Q_k}{\partial V_j} = |V_k|Y_{kj} \text{sen}(\delta_k - \delta_j - \theta_{kj})$$

**J<sub>4</sub>:**

$$\frac{\partial Q_k}{\partial \delta_k} = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n |V_k||V_j|Y_{kj} \cos(\delta_k - \delta_j - \theta_{kj})$$

$$\frac{\partial P_k}{\partial \delta_j} = -|V_k||V_j|Y_{kj} \cos(\delta_k - \delta_j - \theta_{kj})$$

En la barra PV, la potencia activa inyectada en la barra se especifica, al igual que el módulo de la tensión. Debido a que la tensión se especifica, solo interviene la ecuación de potencia. La barra de compensación o barra oscilantes, no genera incógnitas, es decir, no interviene en el sistema de ecuaciones de flujo de carga. Para finalizar se debe mencionar que el número de ecuaciones que se deben resolver, dependen del número de barras de tipo PQ y PV.

$$\# \text{Ecuaciones} = 2(\# \text{barras PQ}) + \# \text{barras PV.}$$

La ecuación anterior se deriva del hecho de que las barras PQ contribuyen cada una con dos incógnitas, mientras que las barras PV, solo contribuyen con una incógnita.

### 3.15 Aplicación de Factores de Aceleración

En algunas ocasiones el número de iteraciones necesarias para un estudio de flujo de carga se reduce considerablemente utilizando los denominados factores de aceleración; donde luego de cada iteración se toma la variable y se acelera.

$$V_{k,acel}^{(i+1)} = V_k^{(i)} + \alpha [V_k^{(i+1)} - V_k^{(i)}]$$

siendo :  $\alpha$  el factor de aceleración.

### 3.16 Técnica Iterativa de Gauss - Seidel

La descripción de las técnicas de solución de flujo de potencia puede resultar más complicado, debido más a la notación requerida para la aritmética compleja que a los conceptos básicos de los métodos de solución. En la siguiente sección, entonces, las técnicas básicas son consideradas y desarrolladas considerando su aplicación a un circuito DC. La aplicación a problemas AC son entonces una extensión natural al problema DC. El algoritmo de solución Gauss- Seidel, aunque no es el más poderoso, es el más fácil de entender. El

rendimiento de la técnica de Gauss Seidel será ilustrado usando un circuito de corriente continua mostrado en la Figura 1.

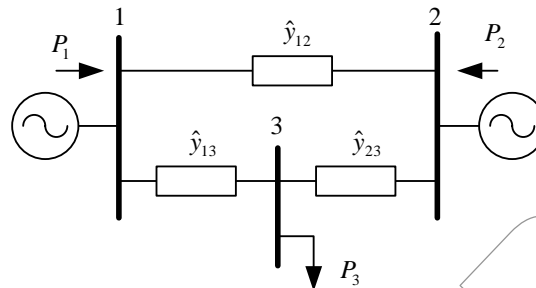


Figura 1. Sistema DC, 3 barras

La barra 3 es una barra de carga especificada la potencia en por unidad. La barra 2, es una barra de generación con potencia especificada, y la barra 1 es la swing bus, con voltaje especificado. Los voltajes  $V_2$  y  $V_3$  son variables. Para estos, los flujos de ramas son calculados.

El sistema de ecuaciones en una base de admitancia es:

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} & Y_{13} \\ Y_{21} & Y_{22} & Y_{23} \\ Y_{31} & Y_{32} & Y_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{bmatrix} \quad (1)$$

Los términos de la matriz de admitancia son fácilmente determinados. La matriz de admitancia es muy *spars* (pocos elementos no ceros), y técnicas especiales de matriz son frecuentemente usados para minimizar el almacenamiento en computadora; de la ecuación (1) se obtiene:

$$I_2 = Y_{21}V_1 + Y_{22}V_2 + Y_{23}V_3 \quad (2)$$

ó

$$V_2 = \frac{1}{Y_{22}} [I_2 - (Y_{21}V_1 + Y_{23}V_3)] \quad (3)$$

Sustituyendo la expresión de potencia:

$$I_2 = \frac{P_2}{V_2} \quad (4)$$

Se tiene:

$$V_2 = \frac{1}{Y_{22}} \left[ \frac{P_2}{V_2} - Y_{21}V_1 - Y_{23}V_3 \right] \quad (5)$$

La ecuación (5) es una ecuación no lineal (*no lineal*) para la tensión  $V_2$ . Para la barra 3, el procedimiento es similar:

$$V_3 = \frac{1}{Y_{33}} \left[ -\frac{P_3}{V_3} - Y_{31}V_1 - Y_{32}V_2 \right] \quad (6)$$

Donde el signo negativo de la potencia  $P_3$ , es por convención de signo de carga.

Las ecuaciones (5) y (6) son una forma conveniente para la aplicación de la técnica de solución iterativo de Gauss seidel. Los pasos para este proceso son:

- Paso 1: Asigne un estimado a  $V_2$  y  $V_3$  (por ejemplo  $V_2=V_3= 1.0$  p.u). Note que  $V_1$  es fijo.
- Paso 2: Calcular un nuevo valor de  $V_2$ , usando los valores estimados de  $V_2$  y  $V_3$ .
- Paso 3: calcular un nuevo valor de  $V_3$ , usando el valor inicial de  $V_3$  y el recién valor calculado de  $V_2$ .

Solo para ser empleado con objetivo de evaluación, o académicos. Prohibido la reproducción total o parcial de este documento.

- Paso 4: Repita (2) y (3) usando el último voltaje calculado  $V_2$  y  $V_3$ , hasta que la solución sea alcanzada. Un cálculo completo de  $V_2$  y  $V_3$  es una iteración.

El voltaje calculado se dice que converge cuando, para cada iteración se hacen más cerca de la solución real, satisfaciendo las ecuaciones de redes, debido a que el tiempo de cálculo se incrementa linealmente con el número de iteraciones, es necesario tener un programa que realice la verificación después de cada iteración y decida cuando el voltaje calculado está suficientemente cerca de la solución verdadera o cuando más cálculos deben ser hechos. El criterio que especifica la precisión deseada es llamado *criterio de convergencia*.

Un confiable criterio de convergencia en la potencia debe ser verificado. Basado en la más reciente solución de voltaje calculado, la suma de los flujos de potencia (real y reactiva) en todas las líneas conectadas a la barra y las barras shunt es comparada con la potencia real y reactiva especificada. La diferencia la cual es la potencia perdida (*mismatch*) es una medida de cómo tan cerca esta el voltaje calculado a la solución. La tolerancia de equilibrio de potencia, es especificada en el rango de 0.01 a 0.0001 p.u. en la base de los MVA del sistema.

Una diferente convergencia verifica o evalúa el máximo cambio de cualquier voltaje de barra en una iteración a la otra. Una solución con precisión deseada es asumida cuando el cambio es menor que un pequeño valor especificado, por ejemplo 0.0001 p.u.

Una verificación de voltaje es dependiente de la tasa de convergencia y es entonces menos confiable que la verificación de equilibrio de potencia. Sin embargo, la verificación de voltaje es más rápida (computacionalmente, en una computadora digital) que el balance de potencia, y debido a que el balance de potencia será más largo hasta voltajes de cambios sean más pequeños. Uno puede económicamente usar un proceso donde el cálculo de balance de carga es ignorado hasta que pequeños variaciones de voltaje sucedan.

Mientras que la solución de un circuito DC, fue descrito, la solución de un circuito AC, puede ser muy similar. Para el ejemplo de tres barras mostrado, magnitud de la tensión y ángulo en la barra 1 es especificado, la potencia generada y el voltaje de barra 2 es dado y la potencia activa y reactiva de la barra 3.

La solución de flujo de potencia determina el ángulo y la potencia reactiva del generador de la barra 2 y la magnitud y ángulo de la tensión en la barra 3.

La solución de flujo de potencia determina el ángulo y la potencia reactiva del generador de la barra 2, y la magnitud y ángulo de la tensión en la barra 3.

La versión AC de la ecuación (5) y (6) es:

$$V_i^{(k)} = \frac{1}{Y_{ii}} \left[ -\frac{P_i - jQ_i}{V_i^{*(k-1)}} - \sum_{j=1}^{i-1} Y_{ij} V_j^{(m)} - \sum_{j=1}^n Y_{ij} V_j^{(k-1)} \right] \quad (7)$$

El análisis de flujo de potencia resuelve el conjunto de desconocidos que produce el balance de potencia en todas las barras.

$$P_i^{Exp} + jQ_i^{Exp} = P_i^{Calc} + jQ_i^{Calc} \quad (8)$$

donde:

$$P_i^{Exp} + jQ_i^{Exp} = V_i I_i^* \quad (9)$$

En otras palabras, la potencia especificada a cada barra debe ser igual a la potencia que fluye dentro del sistema.

La potencia generada entra como generación y es positiva, y consiste de la ecuación  $\mathbf{YV} = \mathbf{I}$ . Debido a que son dos incógnitas en cada barra, el tamaño del problema de flujo de potencia es  $2n$ , donde  $n$  es el número



de barras. Obviamente para resolver el problema, deben ser dos ecuaciones por barra. De la ley de corrientes de Kirchoff, para la barra  $i$ , resulta:

$$P_i^{Esp} + jQ_i^{Esp} = P_i^{Calc} + jQ_i^{Calc} = V_i I_i^* = V_i \left[ \sum_{j=1}^n Y_{ij} V_j \right]^* \quad (10)$$

Separando en parte real e imaginaria, las dos ecuaciones para la barra  $i$ , resultan evidente:

$$P_i^{Esp} = \sum_{j=1}^n |Y_{ij}| |V_j| |V_i| \cos(\delta_i - \delta_j - \theta_{ij}) \quad (11)$$

$$Q_i^{Esp} = \sum_{j=1}^n |Y_{ij}| |V_j| |V_i| \text{sen}(\delta_i - \delta_j - \theta_{ij}) \quad (12)$$

Donde:  $V_i = |V_i| \angle \delta_i$ ,  $V_j = |V_j| \angle \delta_j$ ,  $Y_{ij} = |Y_{ij}| \angle \theta_{ij}$ .

El problema ahora es encontrar el conjunto de voltajes de barra que satisfacen las  $2n$  ecuaciones. El método de Gauss – Seidel es un formulación temprana del problema de flujo de potencia que requiere poca memoria y que es fácilmente programable, sin embargo es usualmente el más lento que los otros métodos, esta basado en la idea de expandir la forma compleja del balance ecuación como sigue:

$$P_i^{Esp} + jQ_i^{Esp} = V_i I_i^* = V_i \left[ \sum_{j=1}^n Y_{ij} V_j \right]^* = V_i \left[ Y_{ii} V_i + \sum_{j=1, j \neq i}^n Y_{ij} V_j \right]^* \quad (13)$$

ó

$$P_i^{Esp} + jQ_i^{Esp} = V_i I_i^* = V_i^* Y_{ii} V_i + V_i^* \sum_{j=1, j \neq i}^n Y_{ij} V_j \quad (14)$$

De modo que resulta:

$$V_i = \frac{1}{Y_{ii}} \left[ \frac{P_i - jQ_i}{V_i^*} - \sum_{j=1, j \neq i}^n Y_{ij} V_j \right] \quad (7)$$

### 3.17 Técnica Iterativa de Newton-Raphson

No todos los problemas de flujo de carga pueden ser eficientemente resueltos aplicando la técnica de Gauss-Seidel. Para algunos problemas, el esquema de convergencia resulta sumamente lento. Para otros, no converge del todo. Los problemas que no pueden ser resueltos usando la técnica de Gauss-Seidel pueden ser frecuentemente resueltos usando la técnica de Newton-Raphson. Esta aproximación utiliza las derivadas parciales de la relaciones de flujo de carga para estimar los cambios en la variable independiente requeridos para encontrar la solución. En general, la técnica de Newton Raphson exhibe una convergencia usando menos iteraciones que la técnica de Gauss-Seidel. Sin embargo, el esfuerzo computacional por iteración es algo mayor.

Aplicar la técnica de Newton-Raphson al ejemplo de tres barras de la Figura 1, las potencias de barras son expresadas como funciones no lineales de los voltajes de barra.

$$\begin{aligned} P_1 &= V_1(Y_{11}V_1 + Y_{12}V_2 + Y_{13}V_3) \\ P_2 &= V_2(Y_{21}V_1 + Y_{22}V_2 + Y_{23}V_3) \\ P_3 &= V_3(Y_{31}V_1 + Y_{32}V_2 + Y_{33}V_3) \end{aligned}$$

Pequeños cambios en los voltajes de barra ( $\Delta V$ ) causarán correspondientemente pequeños cambios en la potencia de barra ( $\Delta P$ ). Una aproximación *linealizada* al cambio de potencia como una función de los cambios de voltaje puede ser obtenido como sigue:

$$\begin{bmatrix} \Delta P_1 \\ \Delta P_2 \\ \Delta P_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial P_1}{\partial V_1} & \frac{\partial P_1}{\partial V_2} & \frac{\partial P_1}{\partial V_3} \\ \frac{\partial P_2}{\partial V_1} & \frac{\partial P_2}{\partial V_2} & \frac{\partial P_2}{\partial V_3} \\ \frac{\partial P_3}{\partial V_1} & \frac{\partial P_3}{\partial V_2} & \frac{\partial P_3}{\partial V_3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta V_1 \\ \Delta V_2 \\ \Delta V_3 \end{bmatrix}$$

o simbólicamente:

$$\Delta \mathbf{P} = \mathbf{J} \Delta \mathbf{V}$$

donde  $\mathbf{J}$ , es la *matriz Jacobiana*, que contiene las derivadas parciales de la potencia respecto a los voltajes para un particular juego de voltajes,  $V_1, V_2, V_3$ , que son, las derivadas parciales de la ecuación (1). Cuando uno o más voltajes cambia substancialmente, una matriz Jacobiana debe ser calculada. En el problema de flujo de carga ya enunciado,  $V_1$  es especificado, que es,  $V_1=0$ , también debido  $\Delta P_1$  no entra explícitamente en el calculo de la ecuación (2) pudiendo ser reducido:

$$\begin{bmatrix} \Delta P_2 \\ \Delta P_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial P_2}{\partial V_2} & \frac{\partial P_2}{\partial V_3} \\ \frac{\partial P_3}{\partial V_2} & \frac{\partial P_3}{\partial V_3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta V_2 \\ \Delta V_3 \end{bmatrix}$$

Los cambios en  $V_2$  y  $V_3$  debido a los cambios en  $P_2$  y  $P_3$  son obtenidos por la inversión de  $\mathbf{J}$ , obteniendo:

$$\Delta \mathbf{V} = \mathbf{J}^{-1} \Delta \mathbf{P}$$

El método de solución de flujo de carga por la técnica de Newton-Raphson es entonces como sigue:

- Paso 1: Asignen estimaciones a  $V_2$  y  $V_3$  (Por ejemplo:  $V_2 = V_3 = 1.0$  p.u)
- Paso 2: Calcule  $P_2$  y  $P_3$  de la ecuación (1).
- Paso 3: Calcule la diferencia de potencia ( $\Delta P$ ) entre la potencia calculada y la potencia estimada.

$$\Delta P_2 = P_2 - P_2'$$

$$\Delta P_3 = P_3 - P_3'$$

donde las primas indican el valor especificado.

- Paso 4:  $\Delta \mathbf{P} \neq 0$ , es causado por errores en los voltajes, esto visto que los voltajes deber ser incorrectos, por un valor que cercanamente aproximado por  $\Delta \mathbf{V}$  como evaluado en la ecuación (4).

Entonces los nuevos valores estimados para los voltajes de barra son:

$$\begin{bmatrix} V_2 \\ V_3 \end{bmatrix}_{new} = \begin{bmatrix} V_2 \\ V_3 \end{bmatrix}_{old} - \mathbf{J}^{-1} \begin{bmatrix} P_2 \\ P_3 \end{bmatrix}$$

Esta es la ecuación básica en el método de Newton-Raphson, el signo negativo es debido a la forma en que  $\Delta \mathbf{P}$  es definido.

- Paso 5: Recalcule e invierta la matriz Jacobiana usando los últimos valores calculados de voltaje y calcule de nuevo estimado para los voltajes usando las ecuaciones (5) y (6). Repita este procedimiento hasta que  $\Delta P_2$  y  $\Delta P_3$  sean menores que un pequeño valor (*criterio de convergencia*).

Los programas par computadoras digitales que resuelven flujos de carga para grandes sistemas de potencia, no calculan explícitamente el inverso del Jacobiano. Al contrario, la corrección de voltaje  $\Delta \mathbf{V}$  es obtenido por la técnica numérica conocida como *eliminación gaussiano*. Esta técnica es mucho más rápida y requiere menos almacenaje que la inversión de la matriz.

La convergencia de la técnica de Newton-Raphson no es asintótica como es el caso con el esquema iterativo de Gauss-Seidel. La convergencia es muy rápida para las primeras pocas iteraciones y lento para la cercanía a la solución.

Para la solución de flujo de carga AC, la matriz Jacobiana puede ser arreglada como sigue:

$$\begin{bmatrix} \Delta P \\ \Delta Q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_1 & \mathbf{J}_2 \\ \mathbf{J}_3 & \mathbf{J}_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \delta \\ \Delta |V| \end{bmatrix}$$

Donde los voltajes de barra complejos son escritos en forma polar  $|V| \angle \delta$ . La matriz Jacobiana puede ser arreglada en varias formas diferentes para acomodarse a la técnica de programación seleccionada.

Una aproximación a la formulación de Newton-Raphson puede ser obtenida por observación que, para un pequeño cambio de magnitud del voltaje de barra  $\Delta|V|$ , la potencia real,  $P$ , no cambia apreciablemente. Similarmente, para un pequeño cambio en el ángulo del voltaje de barra  $\Delta\delta$ , la potencia reactiva,  $Q$ , no cambia mucho. Entonces, en la ecuación (6).

$$\begin{aligned} \mathbf{J}_2 &= \frac{\partial P}{\partial |V|} \cong 0 \\ \mathbf{J}_3 &= \frac{\partial Q}{\partial \delta} \cong 0 \end{aligned}$$

Esto permite que la ecuación (6) se desacople, en la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \Delta P &= \mathbf{J}_1 \Delta \delta \\ \Delta Q &= \mathbf{J}_4 \Delta |V| \end{aligned}$$

Nótese que estas dos ecuaciones pueden ser resueltas independientemente, con eso, reduce los requerimientos de almacenaje y tiempo de solución comparados a los usados por el Jacobiano completo.

La técnica de *Newton Raphson Desacoplado* puede ser usado en aplicaciones donde la velocidad computacional es importante y la solución de comienzo esta cerca de la solución real. Esta situación frecuentemente ocurre donde una serie de contingencias tienen que ser estudiadas acerca de un caso de referencia previamente resuelto. Sin embargo, el método desacoplado no trabaja bien en sistemas con una alta relación resistencia-reactancia, tales como frecuentemente se encuentran en los sistemas industriales.

### 3.17.1. Comparación de las Técnicas de Solución de Flujo de Potencia

Las técnicas descritas anteriormente son técnicas básica de solución al flujo de carga. Algunas variaciones y mejoras a estas técnicas han sido desarrolladas e incorporadas en los programas de flujo de carga para mejorar las características de arranque y convergencia.

No obstante es usual entender como la técnica de solución de flujo de carga trabaja, es más importante entender las características que exhiben. Debido a que su convergencia depende de la red, carga, condiciones de los generadores, cada técnica iterativa discutida posee sus propias fortalezas y debilidades.

El método de Gauss-Seidel generalmente exhibe una pobre característica de convergencia y entonces no son ampliamente usados para los estudios de flujo de carga. La mayoría de las investigaciones en las técnicas de solución de flujo de carga se han centrado en los métodos de Newton. Variaciones del método original, espacialmente la habilidad de converger desde estimaciones iniciales de voltaje pobre.

Los métodos modificados de Newton empleados por los programas comerciales de flujo de cara combinan las características de buena convergencia y algoritmos de solución robustos.