Reporte
NO CLASIFICADO

Resolución del Primer Examen Parcial de Sistemas de Potencia II

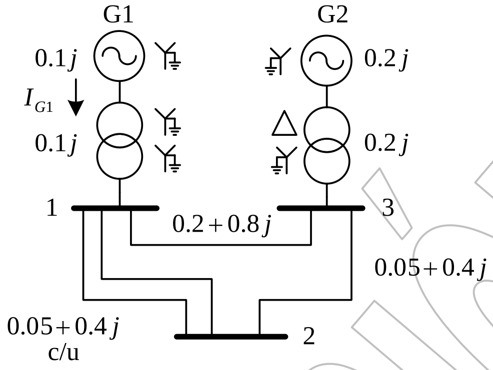
Profesor: Francisco M. González-Longatt

Declaración del Autor: El presente documento es la primera edición de un manuscrito, el cual puede contener errores de trascripción. Al autor no se hace responsable, por el uso de este documento, hasta que una revisión sea efectuada y publicada en posteriores ediciones. En caso de cualquier discrepancia en los resultados por favor contactar al autor a: fglongatt@iee.org

23-Feb-2006

Resolución Pregunta # 1

Problema #1. El diagrama unificar mostrado abajo, representa un simple sistema de potencia de tres barras. Cada generador es representado por su FEM detrás de la reactancia transitoria. Todas la impedancias están expresadas en por unidad en una base común de 100 MVA. Suponga que todos los generadores operan a su voltaje y frecuencia nominal y sus FEM están en fase.



1.1. La matriz Impedancia de barra $\mathbf{Z_{bus}}$, empleando el algoritmo de formación de matriz impedancia de barra [2 pts].

Inicialmente se observa que los generadores poseen asociados en seria un transformador elevador. Y entre ellos, no hay asociadas una barra, lo cual indica que para el estudio, no es de interés considerar en la representación matricial, este punto. En tal sentido, es perfectamente valido el cálculo de una impedancia equivalente a la serie de estos dispositivos:

$\hat{Z}_{GT1} = \hat{Z}_{G1} + \hat{Z}_{T1}$ $\qquad$ $\hat{Z}_{GT1} = 0.2j$

$\hat{Z}_{GT2} = \hat{Z}_{G2} + \hat{Z}_{T2}$ $\qquad$ $\hat{Z}_{GT2} = 0.4j$

Por simple comodidad, para la formación de la matriz, se ha intercambia por un momento la numeración de las barras 2 y 3. Por otra parte, observando la topología de la red, se observa que hay dos líneas de transmisión en paralelo entre las barras 1 y 2. Al respecto hay dos modos de tratar esta situación: (1) emplear la teoría de circuitos directamente para el cálculo de la impedancia equivalente para el paralelo (2) considerar las dos líneas explícitamente en la construcción de la matriz impedancia de barra.

 # Barras = 3
 # Enlaces = 5

Caso 1: Impedancia Equivalente

Se procede a obtener la impedancia equivalente correspondiente a las dos líneas de transmisión en paralelo.

$\hat{Z}_{12}^{EQ} = \hat{Z}_{12}^{L1} \,//\, \hat{Z}_{12}^{L2}$ $\qquad$ $\hat{Z}_{12}^{EQ} = \dfrac{\hat{Z}_{12}^{L1}\hat{Z}_{12}^{L2}}{\hat{Z}_{12}^{L2} + \hat{Z}_{12}^{L1}}$

Sustituyendo los respectivos valores: $\hat{Z}_{12}^{L1} = \hat{Z}_{12}^{L2} = 0.05 + 0.4\,jp.u$, se tiene:

$\hat{Z}_{12}^{EQ} = \hat{Z}_{12}^{L1} \,//\, \hat{Z}_{12}^{L2} = 0.025 + j0.2\,p.u$

De tal modo, la lista de construcción asociada a la representación del sistema bajo estudio puede ser vista como:

Barra Inicio	*Barra Final*	*R [p.u]*	*X [p.u]*	*Tipo de Operación*
0	1	0.000	0.20	*I*
0	2	0.000	0.40	*I*
2	3	0.050	0.40	*II*
1	2	0.200	0.80	*III+Kron*
1	3	0.025	0.20	*III+Kron*

La construcción paso a paso de la matriz impedancia de barra es realizada.

```
  Tabla de Construcción
----------------------------------------------------
 Elemento 0-1 Tipo 1
        0 + 0.2000i

-----------------------------------------------------
 Elemento 0-2 Tipo 1
        0 + 0.2000i        0
        0                  0 + 0.4000i

-----------------------------------------------------
 Elemento 2-3 Tipo 2
        0 + 0.2000i        0                  0
        0                  0 + 0.4000i        0 + 0.4000i
        0                  0 + 0.4000i   0.0500 + 0.8000i

-----------------------------------------------------
 Elemento 1-2 Tipo 3 + Kron
 Matriz Sin Kron

        0 + 0.2000i        0                  0                  0 - 0.2000i
        0                  0 + 0.4000i        0 + 0.4000i        0 + 0.4000i
        0                  0 + 0.4000i   0.0500 + 0.8000i        0 + 0.4000i
        0 - 0.2000i        0 + 0.4000i        0 + 0.4000i   0.2000 + 1.4000i

Matriz Luego del Kron

   0.0040 + 0.1720i  -0.0080 + 0.0560i  -0.0080 + 0.0560i
  -0.0080 + 0.0560i   0.0160 + 0.2880i   0.0160 + 0.2880i
  -0.0080 + 0.0560i   0.0160 + 0.2880i   0.0660 + 0.6880i

-----------------------------------------------------
 Elemento 1-3 Tipo 3 + Kron

Matriz Sin Kron
   0.0040 + 0.1720i  -0.0080 + 0.0560i  -0.0080 + 0.0560i  -0.0120 - 0.1160i
  -0.0080 + 0.0560i   0.0160 + 0.2880i   0.0160 + 0.2880i   0.0240 + 0.2320i
  -0.0080 + 0.0560i   0.0160 + 0.2880i   0.0660 + 0.6880i   0.0740 + 0.6320i
  -0.0120 - 0.1160i   0.0240 + 0.2320i   0.0740 + 0.6320i   0.1110 + 0.9480i

 Matriz Luego del Kron

   0.0027 + 0.1578i  -0.0054 + 0.0844i        0 + 0.1333i
  -0.0054 + 0.0844i   0.0109 + 0.2312i        0 + 0.1333i
        0 + 0.1333i        0 + 0.1333i   0.0167 + 0.2667i

-----------------------------------------------------
```

```
---------------------------------------------------
 Matriz Impedancia de Barra


Z =

   0.0027 + 0.1578i  -0.0054 + 0.0844i        0 + 0.1333i
  -0.0054 + 0.0844i   0.0109 + 0.2312i        0 + 0.1333i
        0 + 0.1333i        0 + 0.1333i   0.0167 + 0.2667i

---------------------------------------------------
 Orden de la matriz es :3x3

Z =

  Columns 1 through 2

  0.00272495266321 + 0.15780851238989i -0.00544990532642 + 0.08438297522022i
 -0.00544990532642 + 0.08438297522022i  0.01089981065284 + 0.23123404955956i
                 0 + 0.13333333333333i                  0 + 0.13333333333333i

  Column 3

                 0 + 0.13333333333333i
                 0 + 0.13333333333333i
  0.01666666666667 + 0.26666666666667i
```

De tal modo que la matriz impedancia de barra que representa el sistema es:

$$\mathbf{Z_{bus}} = \begin{bmatrix} 0.0027+0.1578j & -0.0054+0.0844j & 0+0.1333j \\ -0.0054+0.0844j & 0.0109+0.2312j & 0+0.1333j \\ 0+0.1333j & 0+0.1333j & 0.0167+0.2667j \end{bmatrix}$$

```
det(Zbus)= -0.0009 - 0.0039j p.u.
```

Por su parte la matriz admitancia de barra calculada resulta:

```
Y =

  Columns 1 through 2

  0.90950226244344 -11.09954751131221i -0.29411764705882 + 1.17647058823530i
 -0.29411764705882 + 1.17647058823529i  0.60180995475113 - 6.13800904977376i
 -0.61538461538461 + 4.92307692307691i -0.30769230769231 + 2.46153846153846i

  Column 3

 -0.61538461538461 + 4.92307692307691i
 -0.30769230769231 + 2.46153846153846i
  0.92307692307692 - 7.38461538461537i
```

$$\mathbf{Y_{bus}} = \begin{bmatrix} 0.9095-11.0995j & -0.2941+1.1765j & -0.6154+4.9231j \\ -0.2941+1.1765j & 0.6018-6.1380j & -0.3077+2.4615j \\ -0.6154+4.9231j & 0+0.1333j & 0.9231-7.346j \end{bmatrix}$$

```
det(Ybus)= -5.8695e+001 +2.4490e+002j p.u.
```

Si se efectúa la construcción de la matriz admitancia de barra:

Barra Inicio	*Barra Final*	*G [p.u]*	*B [p.u]*
0	1	0	-5.0000
0	2	0	-2.5000
2	3	1.21951	-0.97561
1	2	0.29412	-1.17647
1	3	0.61538	-4.92308

```
Y =

   0.9095 -11.0995i  -0.2941 + 1.1765i  -0.6154 + 4.9231i
  -0.2941 + 1.1765i   0.6018 - 6.1380i  -0.3077 + 2.4615i
  -0.6154 + 4.9231i  -0.3077 + 2.4615i   0.9231 - 7.3846i
```

$$\mathbf{Y_{bus}} = \begin{bmatrix} 0.9095-11.0995j & -0.2941+1.1765j & -0.6154+4.9231j \\ -0.2941+1.1765j & 0.6018-6.1380j & -0.3077+2.4615j \\ -0.6154+4.9231j & 0+0.1333j & 0.9231-7.346j \end{bmatrix}$$

Se invierte la matriz para el cálculo de la matriz impedancia de barra:

```
Z =

   0.0027 + 0.1578i  -0.0054 + 0.0844i  -0.0000 + 0.1333i
  -0.0054 + 0.0844i   0.0109 + 0.2312i        0 + 0.1333i
  -0.0000 + 0.1333i        0 + 0.1333i   0.0167 + 0.2667i
```

$$\mathbf{Z_{bus}} = \begin{bmatrix} 0.0027+0.1578j & -0.0054+0.0844j & 0+0.1333j \\ -0.0054+0.0844j & 0.0109+0.2312j & 0+0.1333j \\ 0+0.1333j & 0+0.1333j & 0.0167+0.2667j \end{bmatrix}$$

Caso 2: Líneas Explicitas

Se procede a obtener matriz impedancia de barra, considerando que se trata en forma explicita la presencia de las dos líneas de transmisión.

Barra Inicio	*Barra Final*	*R [p.u]*	*X [p.u]*	*Tipo de Operación*
0	1	0.000	0.20	*I*
0	2	0.000	0.40	*I*
2	3	0.050	0.40	*II*
1	2	0.200	0.80	*III+Kron*
1	3	0.050	0.40	*III+Kron*
1	3	0.050	0.40	*III+Kron*

```
---------------------------------------------------
 Elemento 1
---------------------------------------------------
 Barra Inicio :0
 Barra Final :1
 Zrama[0,1]=0.20*i
---------------------------------------------------
 Elemento 2
---------------------------------------------------
 Barra Inicio :0
 Barra Final :2
 Zrama[0,2]=0.40*i
---------------------------------------------------
 Elemento 3
---------------------------------------------------
 Barra Inicio :2
 Barra Final :3
 Zrama[2,3]=0.05+0.4*i
---------------------------------------------------
 Elemento 4
---------------------------------------------------
 Barra Inicio :1
 Barra Final :2
 Zrama[1,2]=0.20+0.80*i
---------------------------------------------------
 Elemento 5
---------------------------------------------------
 Barra Inicio :1
 Barra Final :3
 Zrama[1,3]=0.05+0.4*i
---------------------------------------------------
 Elemento 6
---------------------------------------------------
 Barra Inicio :1
 Barra Final :3
 Zrama[1,3]=0.05+0.4*i
```

La matriz de impedancia construida paso a paso, se tiene:

```
  Tabla de Construcción
---------------------------------------------------
 Elemento 0-1 Tipo 1
        0 + 0.2000i

----------------------------------------------------
 Elemento 0-2 Tipo 1
        0 + 0.2000i        0
        0                  0 + 0.4000i

----------------------------------------------------
 Elemento 2-3 Tipo 2
        0 + 0.2000i        0                  0
        0                  0 + 0.4000i        0 + 0.4000i
        0                  0 + 0.4000i   0.0500 + 0.8000i

----------------------------------------------------
 Elemento 1-2 Tipo 3 + Kron
        0 + 0.2000i        0                  0                  0 - 0.2000i
        0                  0 + 0.4000i        0 + 0.4000i        0 + 0.4000i
        0                  0 + 0.4000i   0.0500 + 0.8000i        0 + 0.4000i
        0 - 0.2000i        0 + 0.4000i        0 + 0.4000i   0.2000 + 1.4000i

   0.0040 + 0.1720i  -0.0080 + 0.0560i  -0.0080 + 0.0560i
  -0.0080 + 0.0560i   0.0160 + 0.2880i   0.0160 + 0.2880i
  -0.0080 + 0.0560i   0.0160 + 0.2880i   0.0660 + 0.6880i

----------------------------------------------------



 Elemento 1-3 Tipo 3 + Kron
   0.0040 + 0.1720i  -0.0080 + 0.0560i  -0.0080 + 0.0560i  -0.0120 - 0.1160i
  -0.0080 + 0.0560i   0.0160 + 0.2880i   0.0160 + 0.2880i   0.0240 + 0.2320i
  -0.0080 + 0.0560i   0.0160 + 0.2880i   0.0660 + 0.6880i   0.0740 + 0.6320i
  -0.0120 - 0.1160i   0.0240 + 0.2320i   0.0740 + 0.6320i   0.1360 + 1.1480i

   0.0030 + 0.1603i  -0.0059 + 0.0794i  -0.0015 + 0.1199i
  -0.0059 + 0.0794i   0.0119 + 0.2411i   0.0030 + 0.1603i
  -0.0015 + 0.1199i   0.0030 + 0.1603i   0.0257 + 0.3401i
```

```
----------------------------------------------------
 Elemento 1-3 Tipo 3 + Kron
   0.0030 + 0.1603i  -0.0059 + 0.0794i  -0.0015 + 0.1199i  -0.0044 - 0.0404i
  -0.0059 + 0.0794i   0.0119 + 0.2411i   0.0030 + 0.1603i   0.0089 + 0.0808i
  -0.0015 + 0.1199i   0.0030 + 0.1603i   0.0257 + 0.3401i   0.0272 + 0.2202i
  -0.0044 - 0.0404i   0.0089 + 0.0808i   0.0272 + 0.2202i   0.0817 + 0.6606i

   0.0027 + 0.1578i  -0.0054 + 0.0844i   0.0000 + 0.1333i
  -0.0054 + 0.0844i   0.0109 + 0.2312i  -0.0000 + 0.1333i
  -0.0000 + 0.1333i   0.0000 + 0.1333i   0.0167 + 0.2667i

----------------------------------------------------
----------------------------------------------------
 Matriz Impedancia de Barra


Z =

   0.0027 + 0.1578i  -0.0054 + 0.0844i   0.0000 + 0.1333i
  -0.0054 + 0.0844i   0.0109 + 0.2312i  -0.0000 + 0.1333i
  -0.0000 + 0.1333i   0.0000 + 0.1333i   0.0167 + 0.2667i

----------------------------------------------------
 Orden de la matriz es :3x3

Z =

   0.0027 + 0.1578i  -0.0054 + 0.0844i   0.0000 + 0.1333i
  -0.0054 + 0.0844i   0.0109 + 0.2312i  -0.0000 + 0.1333i
  -0.0000 + 0.1333i   0.0000 + 0.1333i   0.0167 + 0.2667i
```

$$\mathbf{Z_{bus}} = \begin{bmatrix} 0.0027+0.1578j & -0.0054+0.0844j & 0+0.1333j \\ -0.0054+0.0844j & 0.0109+0.2312j & 0+0.1333j \\ 0+0.1333j & 0+0.1333j & 0.0167+0.2667j \end{bmatrix}$$

```
Z =

  Columns 1 through 2

  0.00272495266321 + 0.15780851238989i -0.00544990532642 + 0.08438297522022i
 -0.00544990532642 + 0.08438297522022i  0.01089981065284 + 0.23123404955956i
 -0.00000000000000 + 0.13333333333333i  0.00000000000000 + 0.13333333333333i

  Column 3

  0.00000000000000 + 0.13333333333333i
 -0.00000000000000 + 0.13333333333333i
  0.01666666666667 + 0.26666666666667i
```

Por su parte la matriz admitancia de barra resulta:

```
Y =

  Columns 1 through 2

  0.90950226244344 -11.09954751131222i -0.29411764705882 + 1.17647058823529i
 -0.29411764705882 + 1.17647058823530i  0.60180995475113 - 6.13800904977375i
 -0.61538461538461 + 4.92307692307692i -0.30769230769231 + 2.46153846153846i

  Column 3

 -0.61538461538462 + 4.92307692307692i
 -0.30769230769231 + 2.46153846153846i
  0.92307692307692 - 7.38461538461538i
```

Conclusión

Se puede observar que las matrices admitancia de barra, e impedancia de barra que se calculan con ambos métodos resultan ser iguales, de modo que se puede concluir que el empleo de una impedancia equivalente para representar dos líneas en paralelo arroja los mismo resultados que emplear en forma explicita y exacta la matriz.

(1.1) Determine la matriz de impedancia de barra $\mathbf{Z_{bus}}$, empleando el algoritmo de formación de matriz impedancia de barra.

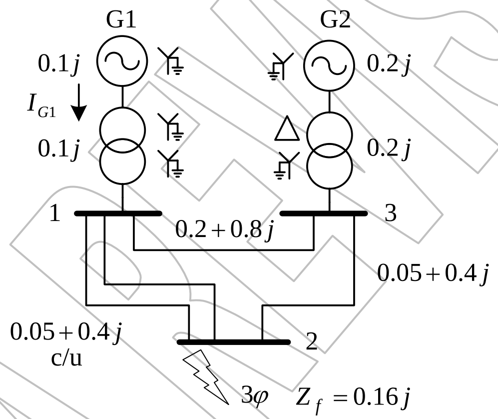
Respuesta.

$$\mathbf{Z_{bus}} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \quad 1 \quad & \quad 3 \quad & \quad 2 \quad \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0.0027+0.1578j & -0.0054+0.0844j & 0+0.1333j \\ -0.0054+0.0844j & 0.0109+0.2312j & 0+0.1333j \\ 0+0.1333j & 0+0.1333j & 0.0167+0.2667j \end{bmatrix} \end{array} \quad \text{(2 Puntos)}$$

Reordenando para la presentación:

$$\mathbf{Z_{bus}} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \quad 1 \quad & \quad 2 \quad & \quad 3 \quad \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0.0027+0.1578j & 0+0.1333j & -0.0054+0.0844j \\ -0.0054+0.0844j & 0.0167+0.2667j & 0+0.1333j \\ -0.0054+0.0844j & 0+0.1333j & 0.0109+0.2312j \end{bmatrix} \end{array}$$

(1.2) Determinar la corriente de falla cuando ocurre un cortocircuito trifásico en la Barra 2, considere la impedancia de falla $Z_f = 0.16j\ p.u.$



Se conoce que el sistema se encuentra en vacío, y además las máquinas operan a voltaje y velocidad nominal, de modo que el voltaje previo a la falla en todas las barras es 1.0 por unidad.

$$V_{pfpf} = 1\angle 0\, p.u$$

De tal modo que la corriente de falla por cortocircuito trifásico en la barra 2, resulta:

$$\bar{I}_2 = \frac{V_{pfpf}}{Z_{22} + Z_f}$$

Siendo Z_{22}, el elemento propio de la barra 2 en la matriz impedancia de barra.

$$Z_{22} = 0.0167 + 0.2667j$$

Sustituyendo los respectivos valores:

$$\bar{I}_2 = 0.0914 - 2.3402\mathrm{i}$$

$\bar{I}_2 = 2.3420\angle -87.7630 \text{p.u}$

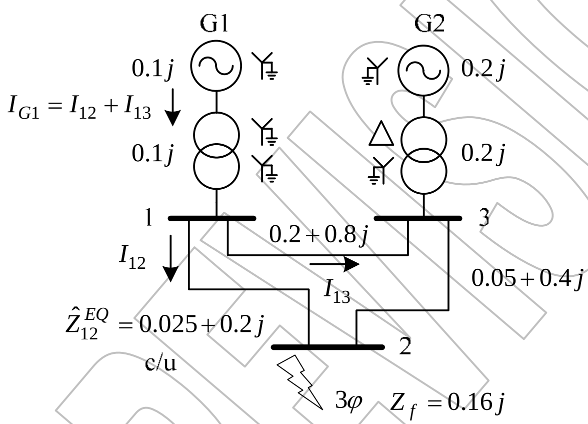
(1.2) Determinar la corriente de falla cuando ocurre un cortocircuito trifásico en la Barra 2, considere la impedancia de falla $Z_f = 0.16j$ *p.u.*

Respuesta.

$$\bar{I}_2 = 2.3420\angle -87.7630 \text{p.u} \quad \text{(2 Puntos)}$$

(1.3) Determine la corriente que entrega el generador G1 (I_{G1}), con la situación planteada en 1.1.

Considerando el sistema fallado en la barra 2, hay varias vías para calcular la corriente que aporta el generador G1.



Un mecanismo, es indirecto, aplicando la ley de corrientes de Kirchoff en la barra 1.

$$I_{G1} = I_{12} + I_{13}$$

Donde I_{12} e I_{13}, son calculados, como las corrientes:

$$I_{12} = \frac{V_1 - V_2}{\hat{Z}_{12}^{EQ}}$$

$$I_{13} = \frac{V_1 - V_3}{\hat{Z}_{13}^{EQ}}$$

Donde los voltajes quedan dados por:

$$\Delta V_1 = Z_{12} I_2$$

$$\Delta V_2 = Z_{22} I_2$$

$$\Delta V_3 = Z_{23} I_2$$

Efectuando las respectivas sustituciones se obtiene:

```
DeltaV1 = 0.312158 < 2.24127
DeltaV2 = 0.625774 < -1.34175
DeltaV3 = 0.312158 < 2.24127
```

Ahora bien los voltajes reales son dados por:

$V_1 = V_{pfpf} - \Delta V_1$

$V_2 = V_{pfpf} - \Delta V_2$

$V_3 = V_{pfpf} - \Delta V_3$

Efectuando las respectivas sustituciones se obtiene:

```
V1 = 0.688189 < -1.01642
V2 = 0.374684 < 2.24127
V3 = 0.688189 < -1.01642
```

Nótese que el voltaje de la barra fallada resulta ser diferente de cero, y eso es lógico que ocurra, debido a que la falla no es sólida, sino que posee una impedancia asociada. De hecho, el valor del voltaje de la barra fallada queda definido, por el voltaje sobre la impedancia de falla:

$$V_2 = Z_f I_2$$

```
V2 = 0.374684 < 2.24127

V2 =  0.3744 + 0.0147i
```

Finalmente las corrientes quedan dadas por:

```
I12 = 1.562 < -87.7693
I13 = 0 < 0
I23 = 0.781 < 92.2307
```

Las corrientes que entran los generadores es:

```
IG1 = 1.562 < -87.7693
I23 = 0.781 < -87.7693
```

Es fácil demostrar se cumple:

$$I_2 = -\left(-I_{12} + I_{23}\right)$$

```
Ifalla = 2.343 < -87.7693
I2 = 2.34177 < -87.7587
```

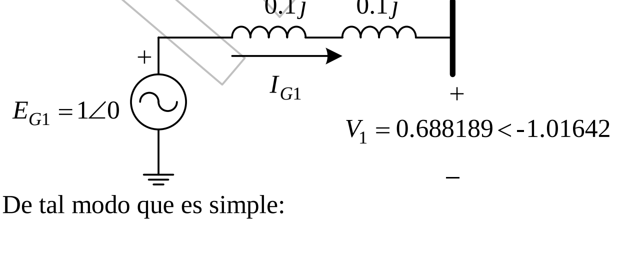
(1.3) Determine la corriente que entrega el generador G1 (I_{G1}), con la situación planteada en 1.1.

Respuesta.

$$\bar{I}_{G1} = 1.562\angle -87.7693\, p.u$$
$$I_{G2} = 0.781\angle -87.7693\, p.u$$

(2 Puntos)

Había una forma mas simple, es determinar el voltaje de la barra 1, V_1 durante la condición planteada, y luego efectuar una simple sumatoria de voltajes.



De tal modo que es simple:

$$I_{G1} = \frac{E_{G1} - V_1}{0.2j}$$

Sustituyendo resulta:

```
IG1 = 1.562 < -87.7693
```

Conclusión, por ambos caminos da el mismo resultado, la diferencia esta en la cantidad de trabajo.

1.4. Determinar el voltaje en la barra 3, cuando ocurre un cortocircuito trifásico sólido en la barra 1.

Al ocurrir una falla en la barra 1, se tiene que la corriente de falla es fácilmente calculada como:

$$\bar{I}_1 = \frac{V_{pfpf}}{Z_{11}} \qquad \bar{I}_1 = \frac{1+0j}{0.00272495266321 + 0.15780851238989j}$$

Sustituyendo valores se obtiene:

```
I1 = 6.33621 < -89.0197
```

$$\bar{I}_1 = 6.33621\angle\text{-}89.0197\, p.u$$

Se procede a calcular el voltaje de la barra 3:

$$\Delta V_3 = Z_{13} I_1 \qquad \text{donde } Z_{13} = 0.13333333333333j$$

```
DeltaV3 = 0.535869 < 4.6411
```

$$\Delta V_3 = 0.535869\angle 4.6411$$

Finalmente

```
V3 = 0.467901 < -5.3171
```

$$V_3 = 0.467901\angle\text{-}5.3171$$

(1.4) Determinar el voltaje en la barra 3, cuando ocurre un cortocircuito trifásico sólido en la barra 1.
Respuesta.

$$V_3 = 0.467901\angle\text{-}5.3171 \quad \text{(2 Puntos)}$$

1.5. Proceda a sacar de operación una de las líneas de transmisión entre las barras 1 y 2, y determine el nuevo valor de corriente de cortocircuito trifásico sólido en la barra 3. [2 pts]

Al sacar de operación la línea, hay dos formas de tratar esto. Una forma es la construcción de la matriz sin considerando solamente una de las dos líneas entre las barras 1 y 2.

```
Ybus =

   1.5136 - 7.1521i  -0.2941 + 1.1765i  -1.2195 + 0.9756i
  -0.2941 + 1.1765i   0.6018 - 6.1380i  -0.3077 + 2.4615i
  -0.3077 + 2.4615i  -0.3077 + 2.4615i   0.6154 - 4.9231i
```

Finalmente se tiene la matriz impedancia.

```
Zbus =

   0.0109 + 0.1693i  -0.0219 + 0.0614i  -0.0456 + 0.0713i
  -0.0024 + 0.0843i   0.0048 + 0.2315i  -0.0166 + 0.1342i
   0.0043 + 0.1268i  -0.0085 + 0.1465i  -0.0061 + 0.3028i
```

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} \quad 1 \quad & \quad\quad 3 \quad\quad & \quad 2 \quad \end{array} \\ \mathbf{Z_{bus}} = & \begin{bmatrix} 0.0109+0.1693j & -0.0219+0.0614j & -0.0456+0.0713j \\ -0.0024+0.0843j & 0.0048+0.2315j & -0.0166+0.1342j \\ 0.0043+0.1268j & -0.0085+0.1465j & -0.0061+0.3028j \end{bmatrix} \end{array}$$

Esta metodología tiene un problema, requiere la construcción a partir de cero, y lo cual involucra tiempo.

Otra forma es tomar la matriz impedancia de barra ya formada y aplicar una operación para eliminar una de las líneas 1-2.

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} \quad 1 \quad & \quad\quad 3 \quad\quad & \quad 2 \quad \end{array} \\ \mathbf{Z_{bus}} = & \begin{bmatrix} 0.0027+0.1578j & -0.0054+0.0844j & 0+0.1333j \\ -0.0054+0.0844j & 0.0109+0.2312j & 0+0.1333j \\ 0+0.1333j & 0+0.1333j & 0.0167+0.2667j \end{bmatrix} \end{array}$$

Es decir, tomar la matriz 3x3 anterior y agregar el negativo del valor a eliminar. $Z_{12}^{Neg} = -0.05 - 0.4j$.

```
  SACAR UNA LÍNEA DE SERVICIO
-----------------------------------------------------

 Barra de Inicio : 1

 Barra Final: 3

-----------------------------------------------------
 Matriz Impedancia de Barra


Zbus =

   0.0109 + 0.1693i  -0.0219 + 0.0614i  -0.0456 + 0.0713i
  -0.0024 + 0.0843i   0.0048 + 0.2315i  -0.0166 + 0.1342i
   0.0043 + 0.1268i  -0.0085 + 0.1465i  -0.0061 + 0.3028i

-----------------------------------------------------
 Orden de la matriz es :3x3
```

Se puede observar que ambos métodos arrojan los mismos resultados.

Al ocurrir una falla en la barra 3, se tiene que la corriente de falla es fácilmente calculada como:

$$\bar{I}_3 = \frac{V_{pfpf}}{Z_{33}}$$

Sustituyendo valores se obtiene:

```
I3 =   0.0895 - 4.3182i
I3 =   3.3022 < -91.1605
```

$$\bar{I}_3 = 3.3022\angle\text{-}91.1605\,p.u$$

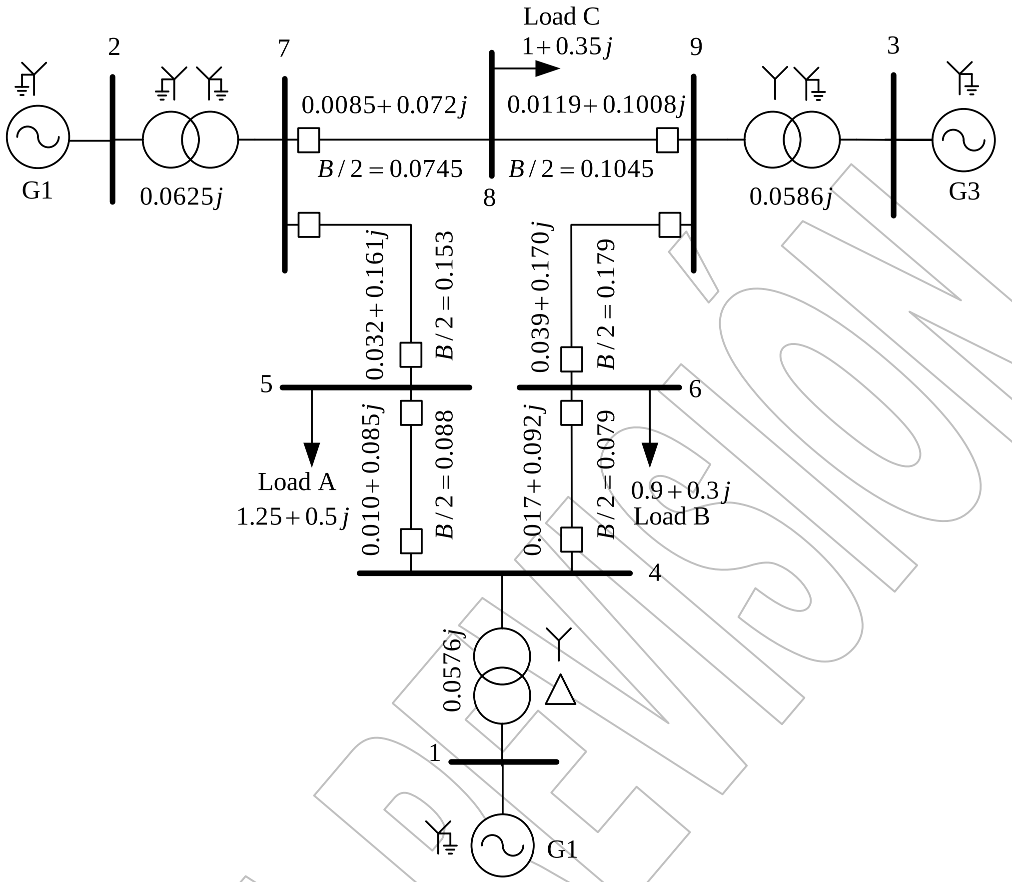
(1.6) Procesa a sacar de operación una de las líneas de transmisión entre las barras 1 y 2, y determine el nuevo valor de corriente de cortocircuito trifásico sólido en la barra 3. [2 pts]

Respuesta.

$$\bar{I}_3 = 3.3022\angle\text{-}91.1605\, p.u \quad \text{(2 Puntos)}$$

Resolución Pregunta # 2

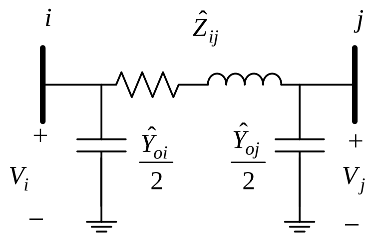
Problema #2. Dado el sistema de potencia de nueve barras mostrado en la Figura. Todas las impedancias están expresadas en por unidad en una base común de 100 MVA. Suponga que todos los generadores operan a su voltaje y frecuencia nominal y sus FEM están en fase.



2.1. Construir la matriz admitancia de barra del sistema $\mathbf{Y_{bus}}$. Considere el sistema esta en vacío, y considere las susceptancias capacitivas de las líneas [2 pts].

Barra de Inicio	*Barra Final*	*Resistencia Serie [p.u]*	*Reactancia Serie [p.u]*	*Susceptancia Capacitiva [p.u]*
1	4	0.00000	0.05760	0.00000
2	7	0.00000	0.06250	0.00000
3	9	0.00000	0.05860	0.00000
4	5	0.01000	0.08500	0.17600
4	6	0.01700	0.09200	0.15800
5	7	0.03200	0.16100	0.30600
6	9	0.03900	0.17000	0.35800
7	8	0.00850	0.07200	0.14900
8	9	0.01190	0.10080	0.20900

Se conoce que las susceptancia capacitiva, provee un cambio a tierra, que puede ser fácilmente visto en el modelo de la línea media:



(2.1) Se obtiene la matriz impedancia de barra:

```
Ybus =

  Columns 1 through 5

        0 -17.3611i        0                  0                  0 +17.3611i        0          
        0                  0 -16.0000i        0                  0                  0          
        0                  0                  0 -17.0648i        0                  0          
        0 +17.3611i        0                  0             3.3074 -39.3089i  -1.3652 +11.6041i
        0                  0                  0            -1.3652 +11.6041i   2.5528 -17.3382i
        0                  0                  0            -1.9422 +10.5107i        0          
        0                  0 +16.0000i        0                  0            -1.1876 + 5.9751i
        0                  0                  0                  0                  0          
        0                  0                  0 +17.0648i        0                  0          

  Columns 6 through 9

        0                  0                  0                  0          
        0                  0 +16.0000i        0                  0          
        0                  0                  0                  0 +17.0648i
  -1.9422 +10.5107i        0                  0                  0          
        0            -1.1876 + 5.9751i        0                  0          
   3.2242 -15.8409i        0                  0            -1.2820 + 5.5882i
        0             2.8047 -35.4456i  -1.6171 +13.6980i        0          
        0            -1.6171 +13.6980i   2.7722 -23.3032i  -1.1551 + 9.7843i
  -1.2820 + 5.5882i        0            -1.1551 + 9.7843i   2.4371 -32.1539i
```

(2 Puntos)

```
det(Ybus) = -1.7480e+009 +1.7068e+009i

abs(det(Ybus)) = 2.4431e+009
```

Se obtiene la matriz impedancia de barra:

```
Zbus =

  Columns 1 through 5

   0.0103 - 0.6225i  -0.0046 - 0.7614i  -0.0061 - 0.7644i   0.0103 - 0.6801i   0.0053 - 0.7178i
  -0.0046 - 0.7614i   0.0089 - 0.6194i   0.0001 - 0.7484i  -0.0046 - 0.7614i  -0.0029 - 0.7439i
  -0.0061 - 0.7644i   0.0001 - 0.7484i   0.0096 - 0.6249i  -0.0061 - 0.7644i  -0.0058 - 0.7691i
   0.0103 - 0.6801i  -0.0046 - 0.7614i  -0.0061 - 0.7644i   0.0103 - 0.6801i   0.0053 - 0.7178i
   0.0053 - 0.7178i  -0.0029 - 0.7439i  -0.0058 - 0.7691i   0.0053 - 0.7178i   0.0099 - 0.6803i
   0.0032 - 0.7208i  -0.0056 - 0.7686i  -0.0037 - 0.7475i   0.0032 - 0.7208i  -0.0004 - 0.7474i
  -0.0046 - 0.7614i   0.0089 - 0.6819i   0.0001 - 0.7484i  -0.0046 - 0.7614i  -0.0029 - 0.7439i
  -0.0060 - 0.7684i   0.0047 - 0.7150i   0.0035 - 0.7268i  -0.0060 - 0.7684i  -0.0048 - 0.7601i
  -0.0061 - 0.7644i   0.0001 - 0.7484i   0.0096 - 0.6835i  -0.0061 - 0.7644i  -0.0058 - 0.7691i

  Columns 6 through 9

   0.0032 - 0.7208i  -0.0046 - 0.7614i  -0.0060 - 0.7684i  -0.0061 - 0.7644i
  -0.0056 - 0.7686i   0.0089 - 0.6819i   0.0047 - 0.7150i   0.0001 - 0.7484i
  -0.0037 - 0.7475i   0.0001 - 0.7484i   0.0035 - 0.7268i   0.0096 - 0.6835i
   0.0032 - 0.7208i  -0.0046 - 0.7614i  -0.0060 - 0.7684i  -0.0061 - 0.7644i
  -0.0004 - 0.7474i  -0.0029 - 0.7439i  -0.0048 - 0.7601i  -0.0058 - 0.7691i
   0.0111 - 0.6810i  -0.0056 - 0.7686i  -0.0055 - 0.7656i  -0.0037 - 0.7475i
  -0.0056 - 0.7686i   0.0089 - 0.6819i   0.0047 - 0.7150i   0.0001 - 0.7484i
  -0.0055 - 0.7656i   0.0047 - 0.7150i   0.0086 - 0.6831i   0.0035 - 0.7268i
  -0.0037 - 0.7475i   0.0001 - 0.7484i   0.0035 - 0.7268i   0.0096 - 0.6835i

det(Zbus)   =   -2.9286e-010 -2.8595e-010i
     abs(det(Zbus)) =   4.0931e-010
```

2.2. Determinar la corriente de falla por cortocircuito trifásico sólido en la barra 2.

Al ocurrir una falla en la barra 2, se tiene que la corriente de falla es fácilmente calculada como:

$$\bar{I}_2 = \frac{V_{pfpf}}{Z_{22}}$$

Sustituyendo valores se obtiene:

```
I2 = 0.0233 + 1.6142i
I2 = 1.6144 < 89.1732
```

(2.2) La corriente de falla por cortocircuito trifásico sólido en la barra 2.

$$\bar{I}_2 = 1.6144\angle 89.1732\, p.u$$ (2 Puntos)

En forma general se calcula la corriente de falla de todas las barras:

```
Corriente de Cortocircuito en Barras
 I1 = 1.60623 < 89.051
 I2 = 1.61438 < 89.1732
 I3 = 1.60015 < 89.118
 I4 = 1.47022 < 89.1313
 I5 = 1.46969 < 89.1695
 I6 = 1.46824 < 89.0666
 I7 = 1.46643 < 89.249
 I8 = 1.46391 < 89.2802
 I9 = 1.46298 < 89.1936
```

2.3. Determine la admitancia que representa cada carga (A, B, C) a voltaje nominal.

Se conoce por teoría, que la impedancia que caracteriza una carga en modelo serie puede ser escrita como:

$$Z_{load} = \frac{|V_{load}|^2}{S_{load}^*}$$

Al sustituir los respectivos valores se tiene:

```
Za = 0.6897 + 0.2759i
Zb = 1.0000 + 0.3333i
Zc = 0.8909 + 0.3118i

Za = 0.742781 < 21.8014
Zb = 1.05409 < 18.4349
Zc = 0.943858 < 19.29
```

(2.3) La llevarlo a admitancia se logra la admitancia que representa cada carga (A, B, C) a voltaje nominal.

```
Ya = 1.2500 - 0.5000i
Yb = 0.9000 - 0.3000i
Yc = 1.0000 - 0.3500i

Ya = 1.34629 < -21.8014
Yb = 0.948683 < -18.4349
Yc = 1.05948 < -19.29
```

(0.5 Puntos)

2.4. A la matriz admitancia de barra obtenida en 2.1, agregar las admitancias correspondientes a las cargas A, B y C.

Al agregar los elementos asociados a las cargas, se trata de admitancias conectadas a la barra desde referencia, de tal modo que agregar estas cargas solo modifica los términos asociados a las admitancias propias de las barras.

```
Ybus_load =

  Columns 1 through 5

        0 -17.3611i        0                  0                  0 +17.3611i        0
        0                  0 -16.0000i        0                  0                  0
        0                  0                  0 -17.0648i        0                  0
        0 +17.3611i        0                  0             3.3074 -39.3089i  -1.3652 +11.6041i
        0                  0                  0            -1.3652 +11.6041i   2.5528 -17.3382i
        0                  0                  0            -1.9422 +10.5107i        0
        0                  0 +16.0000i        0                  0            -1.1876 + 5.9751i
        0                  0                  0                  0                  0
        0                  0                  0 +17.0648i        0                  0

  Columns 6 through 9

        0                  0                  0                  0
        0                  0 +16.0000i        0                  0
        0                  0                  0                  0 +17.0648i
  -1.9422 +10.5107i        0                  0                  0
        0            -1.1876 + 5.9751i        0                  0
   3.2242 -15.8409i        0                  0            -1.2820 + 5.5882i
        0             2.8047 -35.4456i  -1.6171 +13.6980i        0
        0            -1.6171 +13.6980i   2.7722 -23.3032i  -1.1551 + 9.7843i
  -1.2820 + 5.5882i        0            -1.1551 + 9.7843i   2.4371 -32.1539i

                               det(Ybus_load) =  3.2821e+009 +5.2182e+009i
                                             abs(det(Ybus_load))= 6.1646e+009
```

(1 Punto)

2.5. Determinar el porcentaje de variación en la magnitud de la corriente de falla en la barra 2, respecto a la calculada en 2.2.

A partir de la nueva matriz admitancia se barra se calcula la matriz impedancia de barra:

```
Zbus =

  Columns 1 through 5

   0.0103 - 0.6225i  -0.0046 - 0.7614i  -0.0061 - 0.7644i   0.0103 - 0.6801i   0.0053 - 0.7178i
  -0.0046 - 0.7614i   0.0089 - 0.6194i   0.0001 - 0.7484i  -0.0046 - 0.7614i  -0.0029 - 0.7439i
  -0.0061 - 0.7644i   0.0001 - 0.7484i   0.0096 - 0.6249i  -0.0061 - 0.7644i  -0.0058 - 0.7691i
   0.0103 - 0.6801i  -0.0046 - 0.7614i  -0.0061 - 0.7644i   0.0103 - 0.6801i   0.0053 - 0.7178i
   0.0053 - 0.7178i  -0.0029 - 0.7439i  -0.0058 - 0.7691i   0.0053 - 0.7178i   0.0099 - 0.6803i
   0.0032 - 0.7208i  -0.0056 - 0.7686i  -0.0037 - 0.7475i   0.0032 - 0.7208i  -0.0004 - 0.7474i
  -0.0046 - 0.7614i   0.0089 - 0.6819i   0.0001 - 0.7484i  -0.0046 - 0.7614i  -0.0029 - 0.7439i
  -0.0060 - 0.7684i   0.0047 - 0.7150i   0.0035 - 0.7268i  -0.0060 - 0.7684i  -0.0048 - 0.7601i
  -0.0061 - 0.7644i   0.0001 - 0.7484i   0.0096 - 0.6835i  -0.0061 - 0.7644i  -0.0058 - 0.7691i

  Columns 6 through 9

   0.0032 - 0.7208i  -0.0046 - 0.7614i  -0.0060 - 0.7684i  -0.0061 - 0.7644i
  -0.0056 - 0.7686i   0.0089 - 0.6819i   0.0047 - 0.7150i   0.0001 - 0.7484i
  -0.0037 - 0.7475i   0.0001 - 0.7484i   0.0035 - 0.7268i   0.0096 - 0.6835i
   0.0032 - 0.7208i  -0.0046 - 0.7614i  -0.0060 - 0.7684i  -0.0061 - 0.7644i
  -0.0004 - 0.7474i  -0.0029 - 0.7439i  -0.0048 - 0.7601i  -0.0058 - 0.7691i
   0.0111 - 0.6810i  -0.0056 - 0.7686i  -0.0055 - 0.7656i  -0.0037 - 0.7475i
  -0.0056 - 0.7686i   0.0089 - 0.6819i   0.0047 - 0.7150i   0.0001 - 0.7484i
  -0.0055 - 0.7656i   0.0047 - 0.7150i   0.0086 - 0.6831i   0.0035 - 0.7268i
  -0.0037 - 0.7475i   0.0001 - 0.7484i   0.0035 - 0.7268i   0.0096 - 0.6835i

                                            det(Zbus) = -2.9286e-010 -2.8595e-010i
                                               abs(det(Ybus^-1)) =  4.0931e-010
```

Al ocurrir una falla en la barra 2, se tiene que la corriente de falla es fácilmente calculada como:

$$\bar{I}_2 = \frac{V_{pfpf}}{Z_{22}}$$

Sustituyendo valores se obtiene:

```
I2 = 2.6887 - 0.8496i
I2 = 2.81975 < -17.5354
```

En forma general se calcula la corriente de falla de todas las barras:

```
Corriente de Cortocircuito en Barras
 I1 = 2.92959 < -15.8058
 I2 = 2.81975 < -17.5354
 I3 = 2.7236 < -18.3115
 I4 = 3.0272 < -6.14741
 I5 = 3.14496 < -2.90283
 I6 = 2.99963 < -5.30772
 I7 = 2.93205 < -7.47196
 I8 = 2.96228 < -5.38982
 I9 = 2.83159 < -9.24801
```

(2.5) Determinar el porcentaje de variación en la magnitud de la corriente de falla en la barra 2, respecto a la calculada en 2.2.

Barra	*Diferencia en Magnitud [p.u]*	*Diferencia en Angulo de fase [Grados]*
1	-1.3234	104.8568
2	**-1.2054**	**106.7085**
3	-1.1235	107.4295
4	-1.5570	95.2787
5	-1.6753	92.0723
6	-1.5314	94.3743
7	-1.4656	96.7209
8	-1.4984	94.6700
9	-1.3686	98.4416

(2 Puntos)

2.6. Empleando reducción matricial, proceda a determinar la matriz admitancia de barra equivalente, para representar solo hasta las barras 1, 2 y 3 (aplicar reducción matricial para eliminar las barras 4 a la 9).

Para efectuar esto, solo hay que aplicar reducción de Kron, dividiendo la matriz en cuatro submatrices:

$$\mathbf{Y_{bus}} = \begin{bmatrix} \mathbf{Y_A} & \mathbf{Y_B} \\ \mathbf{Y_D} & \mathbf{Y_D} \end{bmatrix} \quad \text{y se aplica:} \quad \mathbf{Y_{bus}^{red}} = \mathbf{Y_A} - \mathbf{Y_B Y_D^{-1} Y_C}$$

Para el caso de la matriz, sin incluir las cargas resulta:

```
YA =

        0 -17.3611i        0                  0
        0                  0 -16.0000i        0
        0                  0                  0 -17.0648i


YB =

  Columns 1 through 5

        0 +17.3611i        0                  0                  0                  0
        0                  0                  0                  0 +16.0000i        0
        0                  0                  0                  0                  0

  Column 6

        0
        0
        0 +17.0648i


YC =

        0 +17.3611i        0                  0
        0                  0                  0
        0                  0                  0
        0                  0 +16.0000i        0
        0                  0                  0
        0                  0                  0 +17.0648i


YD =

  Columns 1 through 5

   3.3074 -39.3089i  -1.3652 +11.6041i  -1.9422 +10.5107i        0                  0
  -1.3652 +11.6041i   2.5528 -17.3382i        0            -1.1876 + 5.9751i        0
  -1.9422 +10.5107i        0             3.2242 -15.8409i        0                  0
        0            -1.1876 + 5.9751i        0             2.8047 -35.4456i  -1.6171 +13.6980i
        0                  0                  0            -1.6171 +13.6980i   2.7722 -23.3032i
        0                  0            -1.2820 + 5.5882i        0            -1.1551 + 9.7843i

  Column 6

        0
        0
  -1.2820 + 5.5882i
        0
  -1.1551 + 9.7843i
   2.4371 -32.1539i

YD^-1 =

  Columns 1 through 5

   3.3074 -39.3089i  -1.3652 +11.6041i  -1.9422 +10.5107i        0                  0
  -1.3652 +11.6041i   2.5528 -17.3382i        0            -1.1876 + 5.9751i        0
  -1.9422 +10.5107i        0             3.2242 -15.8409i        0                  0
        0            -1.1876 + 5.9751i        0             2.8047 -35.4456i  -1.6171 +13.6980i
        0                  0                  0            -1.6171 +13.6980i   2.7722 -23.3032i
        0                  0            -1.2820 + 5.5882i        0            -1.1551 + 9.7843i

  Column 6

        0
        0
  -1.2820 + 5.5882i
        0
  -1.1551 + 9.7843i
   2.4371 -32.1539i


Ybus =

   0.5377 - 4.3456i  -0.2357 + 2.4286i  -0.2956 + 2.4171i
  -0.2357 + 2.4286i   0.3866 - 4.9455i  -0.1537 + 2.9524i
  -0.2956 + 2.4171i  -0.1537 + 2.9524i   0.4474 - 4.9023i
```

Cuando se han incluido las cargas en la matriz admitencia de barra resulta:

```
YA =

        0 -17.3611i        0                  0
        0                  0 -16.0000i        0
        0                  0                  0 -17.0648i


YB =

  Columns 1 through 5

        0 +17.3611i        0                  0                  0                  0
        0                  0                  0                  0 +16.0000i        0
        0                  0                  0                  0                  0

  Column 6

        0
        0
        0 +17.0648i


YC =

        0 +17.3611i        0                  0
        0                  0                  0
        0                  0                  0
        0                  0 +16.0000i        0
        0                  0                  0
        0                  0                  0 +17.0648i


YD =

  Columns 1 through 5

   3.3074 -39.3089i  -1.3652 +11.6041i  -1.9422 +10.5107i        0                  0
  -1.3652 +11.6041i   3.8028 -17.8382i        0            -1.1876 + 5.9751i        0
  -1.9422 +10.5107i        0             4.1242 -16.1409i        0                  0
        0            -1.1876 + 5.9751i        0             2.8047 -35.4456i  -1.6171 +13.6980i
        0                  0                  0            -1.6171 +13.6980i   3.7722 -23.6532i
        0                  0            -1.2820 + 5.5882i        0            -1.1551 + 9.7843i

  Column 6

        0
        0
  -1.2820 + 5.5882i
        0
  -1.1551 + 9.7843i
   2.4371 -32.1539i



YD^-1 =

  Columns 1 through 5

   3.3074 -39.3089i  -1.3652 +11.6041i  -1.9422 +10.5107i        0                  0
  -1.3652 +11.6041i   3.8028 -17.8382i        0            -1.1876 + 5.9751i        0
  -1.9422 +10.5107i        0             4.1242 -16.1409i        0                  0
        0            -1.1876 + 5.9751i        0             2.8047 -35.4456i  -1.6171 +13.6980i
        0                  0                  0            -1.6171 +13.6980i   3.7722 -23.6532i
        0                  0            -1.2820 + 5.5882i        0            -1.1551 + 9.7843i

  Column 6

        0
        0
  -1.2820 + 5.5882i
        0
  -1.1551 + 9.7843i
   2.4371 -32.1539i

Ybus =

   1.1084 - 4.6975i   0.0982 + 2.2563i   0.0088 + 2.2724i
   0.0982 + 2.2563i   0.7409 - 5.1175i   0.1287 + 2.8224i
   0.0088 + 2.2724i   0.1287 + 2.8224i   0.7278 - 5.0267i
```

(2.6) Finalmente se presentan las dos matrices reducidas del sistema:

Sin incluir la carga

```
Ybus =

   0.5377 - 4.3456i  -0.2357 + 2.4286i  -0.2956 + 2.4171i
  -0.2357 + 2.4286i   0.3866 - 4.9455i  -0.1537 + 2.9524i
  -0.2956 + 2.4171i  -0.1537 + 2.9524i   0.4474 - 4.9023i
                                               det(Ybus)= 4.7302 -24.7835i
                                                 abs(det(Ybus)) = 25.2309
```

Incluyendo la carga

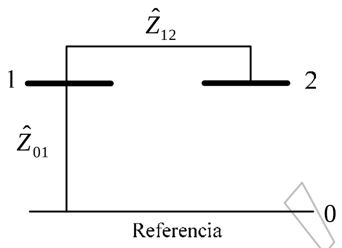
```
Ybus =

   1.1084 - 4.6975i   0.0982 + 2.2563i   0.0088 + 2.2724i
   0.0982 + 2.2563i   0.7409 - 5.1175i   0.1287 + 2.8224i
   0.0088 + 2.2724i   0.1287 + 2.8224i   0.7278 - 5.0267i
                                              det(Ybus)= -55.1077 - 9.2921i
                                                 abs(det(Ybus)) = 55.8856
```

(2 Puntos)

Resolución Pregunta # 3

Problema #3. Suponga que un sistema de potencia como el mostrado en la figura. Construir paso a paso la matriz impedancia de barra siguiendo la siguiente Lista de Construcción: Paso 1: Agregar el Elemento 0-1, $\hat{Z}_{01}$, Paso 2: Agregar el Elemento 1-2 , $\hat{Z}_{12}$, Paso 3: Agregar el Elemento 0-2, $\hat{Z}_{02}$. Demostrar todas las ecuaciones necesarias en el Paso 3.



Resolución.

Paso 1: Se toma como matriz impedancia de barra primitiva, el elemento, 0-1, en tal sentido se tiene:

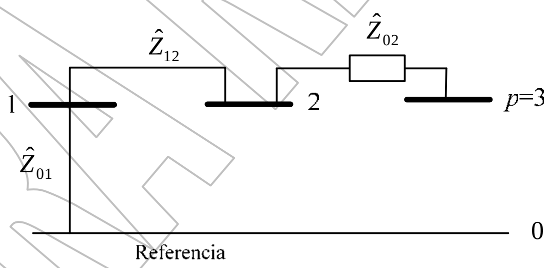
$$\mathbf{Z_{bus}} = \left[\hat{Z}_{01}\right]$$

Paso 2: Se procede a agregar el elemento 1-2, de tal modo que se agrega una barra nueva (la barra 2) desde una barra previamente existente (la barra 1), de modo que la matriz impedancia de barra luego de esta operación resulta:

$$\mathbf{Z_{bus}} = \begin{bmatrix} \hat{Z}_{01} & \hat{Z}_{01} \\ \hat{Z}_{01} & \hat{Z}_{12} + \hat{Z}_{01} \end{bmatrix}$$

Paso 3: Se procede a agregar el elemento 0-2. E este caso, la barra 2 es una barra existente, y la barra 0, es la de referencia.

En este caso, se conecta el elemento $\hat{Z}_{02}$, a la barra 2 y a una barra nueva, la barra nueva será p = 3.



De tal modo, que la matriz impedancia de barra del sistema debe ser aumentada en una fila y una columna:

$$\mathbf{Z_{bus}} = \begin{bmatrix} \hat{Z}_{01} & \hat{Z}_{01} & \hat{Z}_{01} \\ \hat{Z}_{01} & \hat{Z}_{12} + \hat{Z}_{01} & \hat{Z}_{12} + \hat{Z}_{01} \\ \hat{Z}_{01} & \hat{Z}_{12} + \hat{Z}_{01} & \hat{Z}_{02} + \hat{Z}_{12} + \hat{Z}_{01} \end{bmatrix}$$

Una vez se ha agregado este elemento, se procede a cerrar lazo, haciendo que la parra p = 3, se conecte a referencia, dicho de otro modo, el potencial de la barra p se hace cero, con lo que esa barra puede ser eliminada aplicando reducción de Kron.

$$\mathbf{Z}_{\mathbf{bus}} = \begin{bmatrix} \hat{Z}_{01} & \hat{Z}_{01} & \hat{Z}_{01} \\ \hat{Z}_{01} & \hat{Z}_{12} + \hat{Z}_{01} & \hat{Z}_{12} + \hat{Z}_{01} \\ \hat{Z}_{01} & \hat{Z}_{12} + \hat{Z}_{01} & \hat{Z}_{02} + \hat{Z}_{12} + \hat{Z}_{01} \end{bmatrix}$$

Para el elemento Z_{11}, de la matriz impedancia de barra reducida:

$$Z_{11} = Z_{11} - \frac{Z_{13}Z_{31}}{\left(\hat{Z}_{02} + \hat{Z}_{12} + \hat{Z}_{01}\right)}$$

$$Z_{11} = \hat{Z}_{01} - \frac{\hat{Z}_{01}\hat{Z}_{01}}{\left(\hat{Z}_{02} + \hat{Z}_{12} + \hat{Z}_{01}\right)} = \frac{\left(\hat{Z}_{02} + \hat{Z}_{12} + \hat{Z}_{01}\right)\hat{Z}_{01} - \hat{Z}_{01}\hat{Z}_{01}}{\hat{Z}_{02} + \hat{Z}_{12} + \hat{Z}_{01}} = \frac{\hat{Z}_{02} + \hat{Z}_{12}}{\hat{Z}_{02} + \hat{Z}_{12} + \hat{Z}_{01}}$$

$$Z_{11} = \frac{\hat{Z}_{02} + \hat{Z}_{12}}{\hat{Z}_{02} + \hat{Z}_{12} + \hat{Z}_{01}}$$

Para el elemento Z_{12}, de la matriz impedancia de barra reducida:

$$Z_{12} = Z_{22} - \frac{Z_{13}Z_{32}}{\left(\hat{Z}_{02} + \hat{Z}_{12} + \hat{Z}_{01}\right)}$$

$$Z_{12} = \hat{Z}_{01} - \frac{\hat{Z}_{01}\left(\hat{Z}_{12} + \hat{Z}_{01}\right)}{\left(\hat{Z}_{02} + \hat{Z}_{12} + \hat{Z}_{01}\right)} = \frac{\hat{Z}_{01}\left(\hat{Z}_{02} + \hat{Z}_{12} + \hat{Z}_{01}\right) - \hat{Z}_{01}\left(\hat{Z}_{12} + \hat{Z}_{01}\right)}{\left(\hat{Z}_{02} + \hat{Z}_{12} + \hat{Z}_{01}\right)}$$

$$Z_{12} = \frac{\hat{Z}_{01}\hat{Z}_{02}}{\hat{Z}_{01} + \hat{Z}_{12} + \hat{Z}_{02}}$$

Para el elemento Z_{21}, de la matriz impedancia de barra reducida, se conoce que existe simetria:

$$Z_{21} = \frac{\hat{Z}_{01}\hat{Z}_{02}}{\hat{Z}_{01} + \hat{Z}_{12} + \hat{Z}_{02}}$$

Para el elemento Z_{22}, de la matriz impedancia de barra reducida:

$$Z_{22} = Z_{22} - \frac{Z_{23}Z_{32}}{\left(\hat{Z}_{02} + \hat{Z}_{12} + \hat{Z}_{01}\right)}$$

$$Z_{22} = \left(\hat{Z}_{12} + \hat{Z}_{01}\right) - \frac{\left(\hat{Z}_{12} + \hat{Z}_{01}\right)\left(\hat{Z}_{12} + \hat{Z}_{01}\right)}{\left(\hat{Z}_{02} + \hat{Z}_{12} + \hat{Z}_{01}\right)} = \frac{\left(\hat{Z}_{12} + \hat{Z}_{01}\right)\left(\hat{Z}_{02} + \hat{Z}_{12} + \hat{Z}_{01}\right) - \left(\hat{Z}_{12} + \hat{Z}_{01}\right)\left(\hat{Z}_{12} + \hat{Z}_{01}\right)}{\left(\hat{Z}_{02} + \hat{Z}_{12} + \hat{Z}_{01}\right)}$$

$$Z_{22} = \frac{\hat{Z}_{02}\left(\hat{Z}_{12} + \hat{Z}_{01}\right)}{\left(\hat{Z}_{02} + \hat{Z}_{12} + \hat{Z}_{01}\right)}$$

De tal modo que resulta, que la matriz reducida es:

$$\mathbf{Z}_{\mathbf{bus}} = \begin{bmatrix} \dfrac{\left(\hat{Z}_{12} + \hat{Z}_{02}\right)\hat{Z}_{01}}{\hat{Z}_{01} + \hat{Z}_{12} + \hat{Z}_{02}} & \dfrac{\hat{Z}_{01}\hat{Z}_{02}}{\hat{Z}_{01} + \hat{Z}_{12} + \hat{Z}_{02}} \\ \dfrac{\hat{Z}_{01}\hat{Z}_{02}}{\hat{Z}_{01} + \hat{Z}_{12} + \hat{Z}_{02}} & \dfrac{\left(\hat{Z}_{12} + \hat{Z}_{01}\right)\hat{Z}_{02}}{\hat{Z}_{01} + \hat{Z}_{12} + \hat{Z}_{02}} \end{bmatrix}$$

Para verificar que lo hecho hasta ahora es completamente cierto, se construye la matriz admitancia de barra.

$$\mathbf{Y_{bus}} = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{\hat{Z}_{01} + \hat{Z}_{12}} & -\dfrac{1}{\hat{Z}_{12}} \\ -\dfrac{1}{\hat{Z}_{12}} & -\dfrac{1}{\hat{Z}_{01} + \hat{Z}_{12}} \end{bmatrix}$$

La matriz impedancia de barra se obtiene a partir de la inversa de la matriz admitancia.

$$\mathbf{Z_{bus}} = \begin{bmatrix} \dfrac{\left(\hat{Z}_{12} + \hat{Z}_{02}\right)\hat{Z}_{01}}{\hat{Z}_{01} + \hat{Z}_{12} + \hat{Z}_{02}} & \dfrac{\hat{Z}_{01}\hat{Z}_{02}}{\hat{Z}_{01} + \hat{Z}_{12} + \hat{Z}_{02}} \\ \dfrac{\hat{Z}_{01}\hat{Z}_{02}}{\hat{Z}_{01} + \hat{Z}_{12} + \hat{Z}_{02}} & \dfrac{\left(\hat{Z}_{12} + \hat{Z}_{01}\right)\hat{Z}_{02}}{\hat{Z}_{01} + \hat{Z}_{12} + \hat{Z}_{02}} \end{bmatrix}$$

Empleando Matlab™:

```
Ybus =
[ 1/Z12+1/Z01,      -1/Z12]
[      -1/Z12, 1/Z12+1/Z02]

>> Zbus=Y^-1


Zbus =
[ (Z02+Z12)*Z01/(Z01+Z02+Z12),     1/(Z01+Z02+Z12)*Z01*Z02]
[     1/(Z01+Z02+Z12)*Z01*Z02, (Z01+Z12)*Z02/(Z01+Z02+Z12)]
```

Conclusión, por los tres métodos mostrados, los resultados son completamente idénticos.