

ELC-30524  
Sistemas de Potencia II

---

---

Capítulo 2  
Criterio de Áreas Iguales

Prof. Francisco M. González-Longatt

[fglongatt@ieee.org](mailto:fglongatt@ieee.org)

<http://www.giaelec.org/fglongatt/SP2.htm>

# Sistemas de Potencia II

---

## Análisis de Estabilidad



## Introducción a los Métodos de Análisis

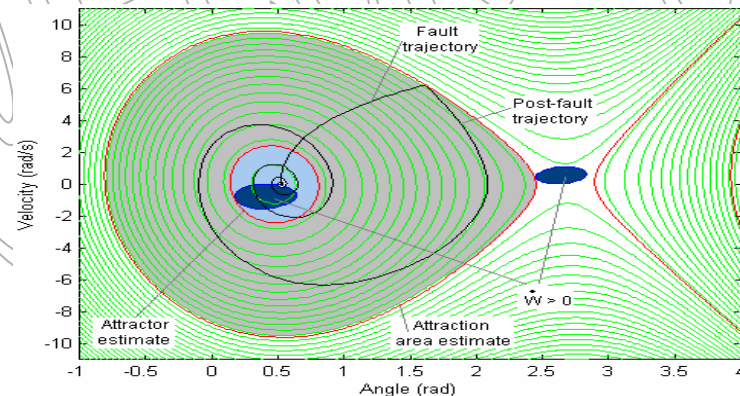
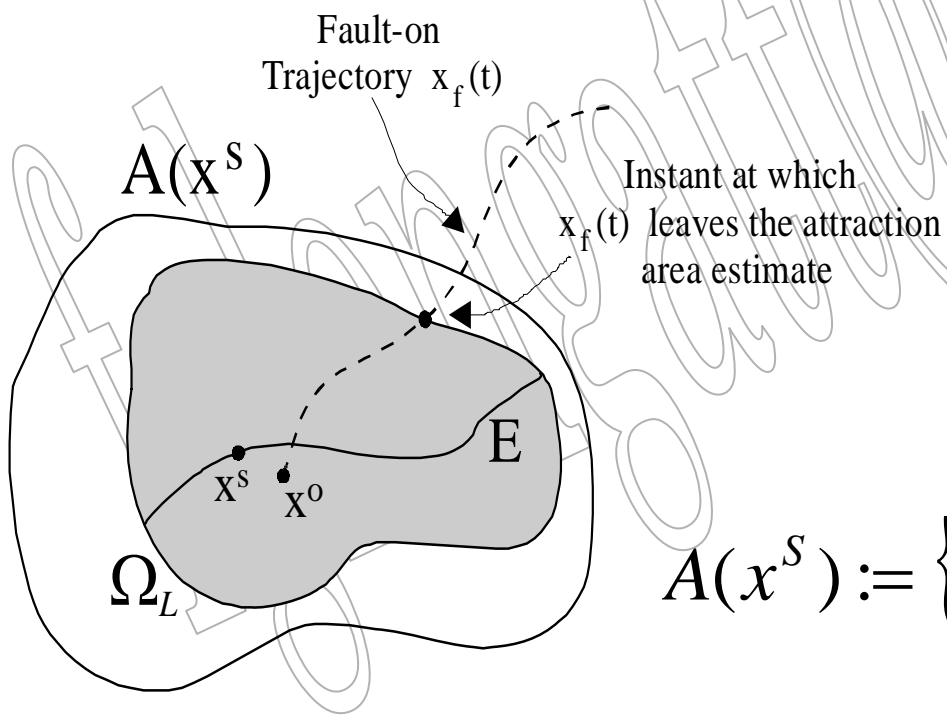
# Métodos para el Análisis de Estabilidad

---

- El análisis de estabilidad transitoria puede emprendido por:
  - Métodos Clásicos.
  - Métodos Directos.
  - Métodos Híbridos
- El primer método directo, fue el *Criterio de Áreas Iguales*, (*Equal Area Criteria*) para una maquina conectada a una barra de potencia infinita (*OMIB One Machine Infinite Bus*).

# Métodos Directos

- Métodos directos más refinados, *Liapunov*, se asocia con el principio de invarianza de LaSelle, el cual es empleado para estimar la región de estabilidad del sistema de potencia (función de Liapunov).



$$A(x^s) := \left\{ x^o \in \mathcal{R}^n : \lim_{t \rightarrow \infty} \Phi(t, x^o) \rightarrow x^s \right\}$$

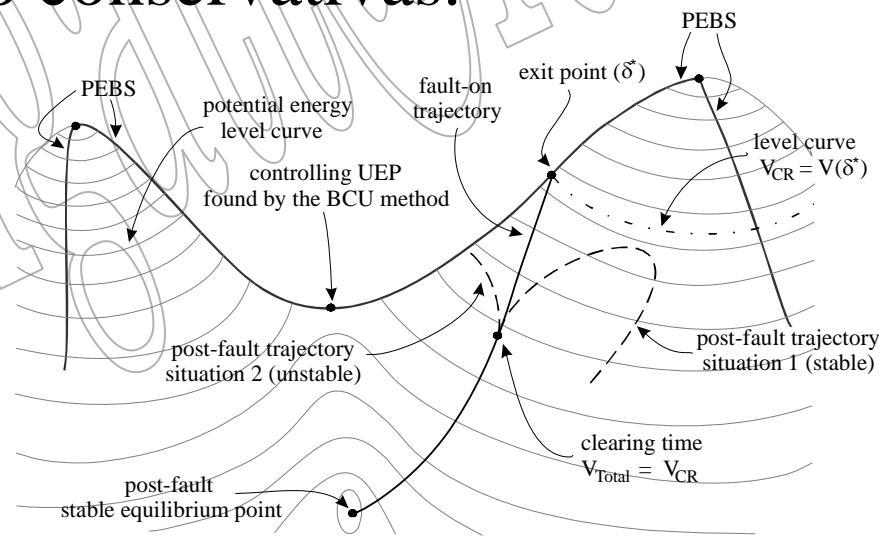
# Métodos Directos

---

- En 1966, El Abiad y Nagapan, calcularon todos los *Puntos de Equilibrio Inestables (UEP Unstable Equilibrium Point)* alrededor de los *Puntos de Equilibrio Estable (SEP Stable Equilibrium Point)* bajo investigación.
- En 1979 se implementa el *Control de los Puntos de Equilibrio Inestable (Control UEP)* por el uso del criterio de aceleración

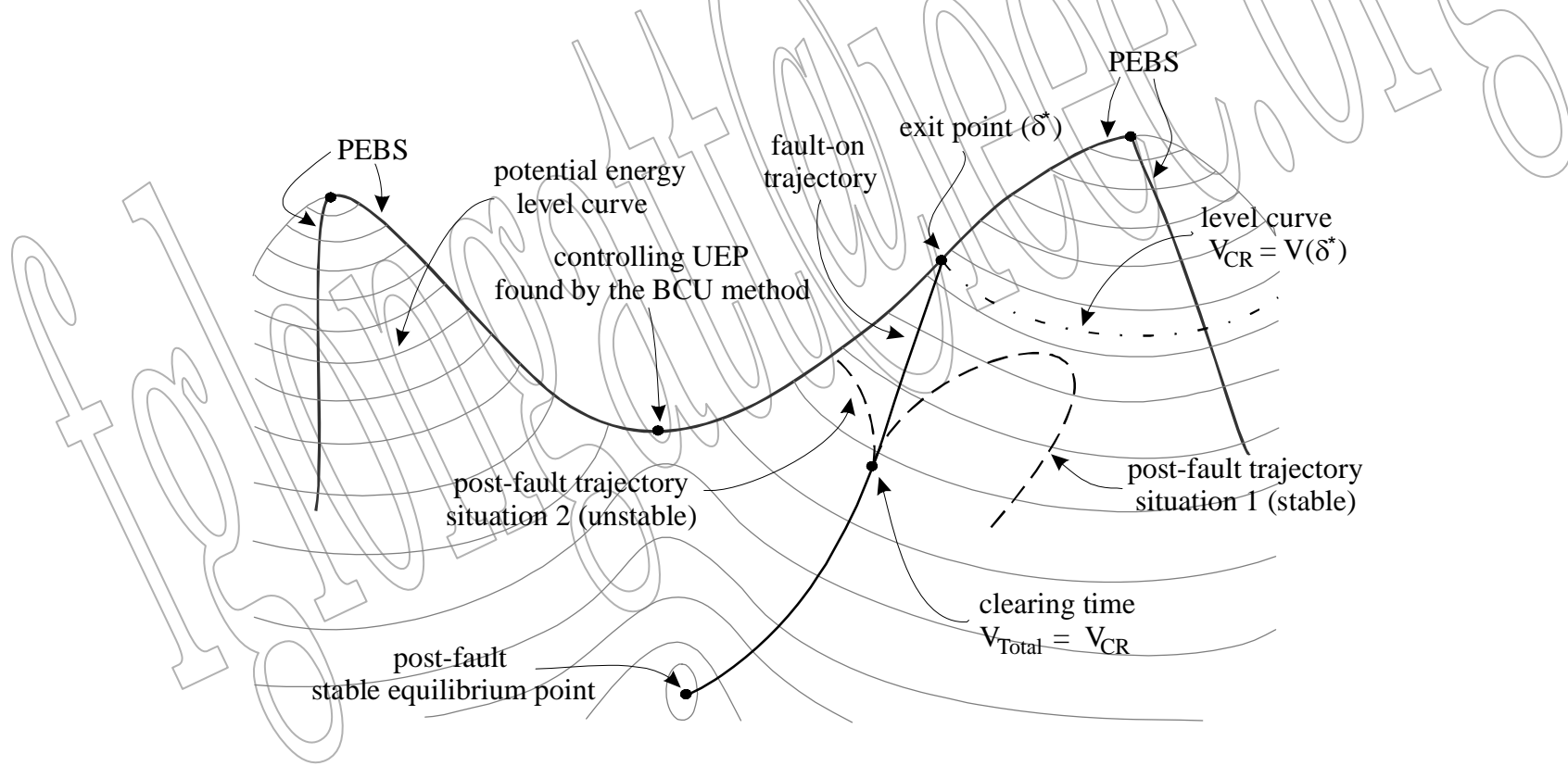
# Métodos Directos

- En 1978, Kakimoto presenta el *Método PEBS* *Potencial Energy Boundary Surface* o Método de superficies de contorno de energía potencial, posee la ventaja que una estimación de CCT es obtenido sin el calculo de los puntos inestables de equilibrio pero como desventaja en algunos casos provee estimaciones no conservativas.



# Métodos Directos

- En 1994, (*BPU: Boundary Control UEP*) Control de Borde de Puntos de Equilibrio Inestables (Chiang), el cual esta basado en el concepto de controlar los UEP.



# Sistemas de Potencia II

---

## Análisis de Estabilidad



## Criterio de Áreas Iguales



# Criterio de Áreas Iguales

---

## Generalidades:

- Los *estudios de estabilidad* involucran el tratamiento con la *ecuación de oscilación* de la máquina, la cual en si forma más simple es una *ecuación no lineal*

$$\frac{H_b}{\pi f} \frac{d^2 \delta(t)}{dt^2} = P_{acel}$$

# Criterio de Áreas Iguales

---

## Generalidades:

$$\frac{H_b}{\pi f} \frac{d^2 \delta(t)}{dt^2} = P_{acel}$$

- La *soluciones formales*, no se pueden encontrar *explícitamente*; bajo las mayores simplificaciones apunta hacia *integrales elípticas*.
- El problema de estabilidad generalizado ha sido enfocado a los *métodos clásicos*, que se basan en la *resolución por métodos numéricos*.

# Criterio de Áreas Iguales

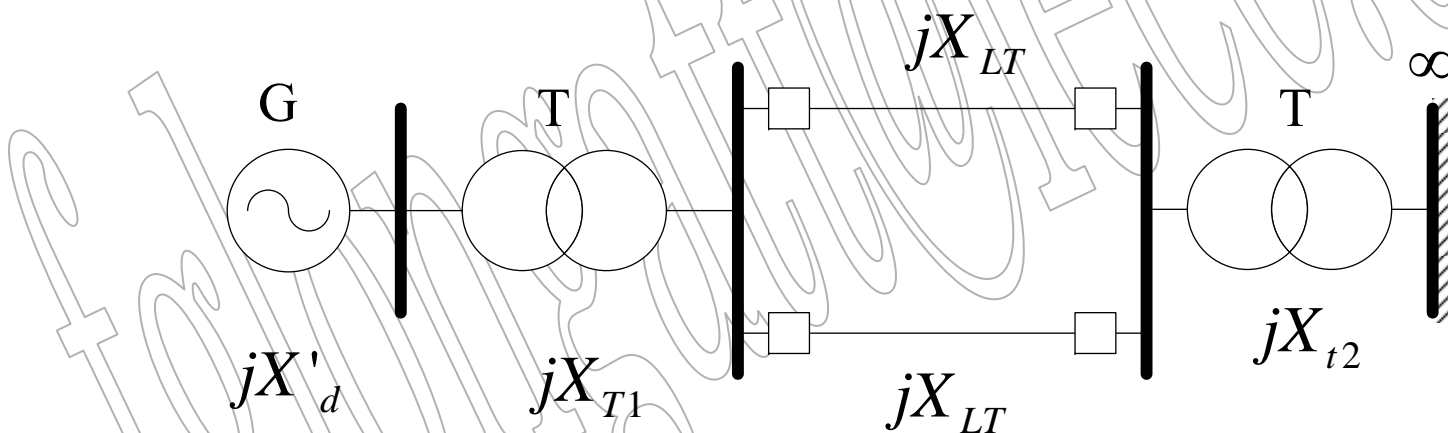
---

## Generalidades:

- En el caso más simple, una máquina contra una barra de potencia infinita (*One Machine Infinite Bus*), o dos máquinas, el estudio de estabilidad puede ser efectuado con métodos que no requieren resolver la ecuación de oscilación, siendo los denominados *métodos directos*.
- El más simple de los métodos directos es el denominado *criterio de áreas iguales*.

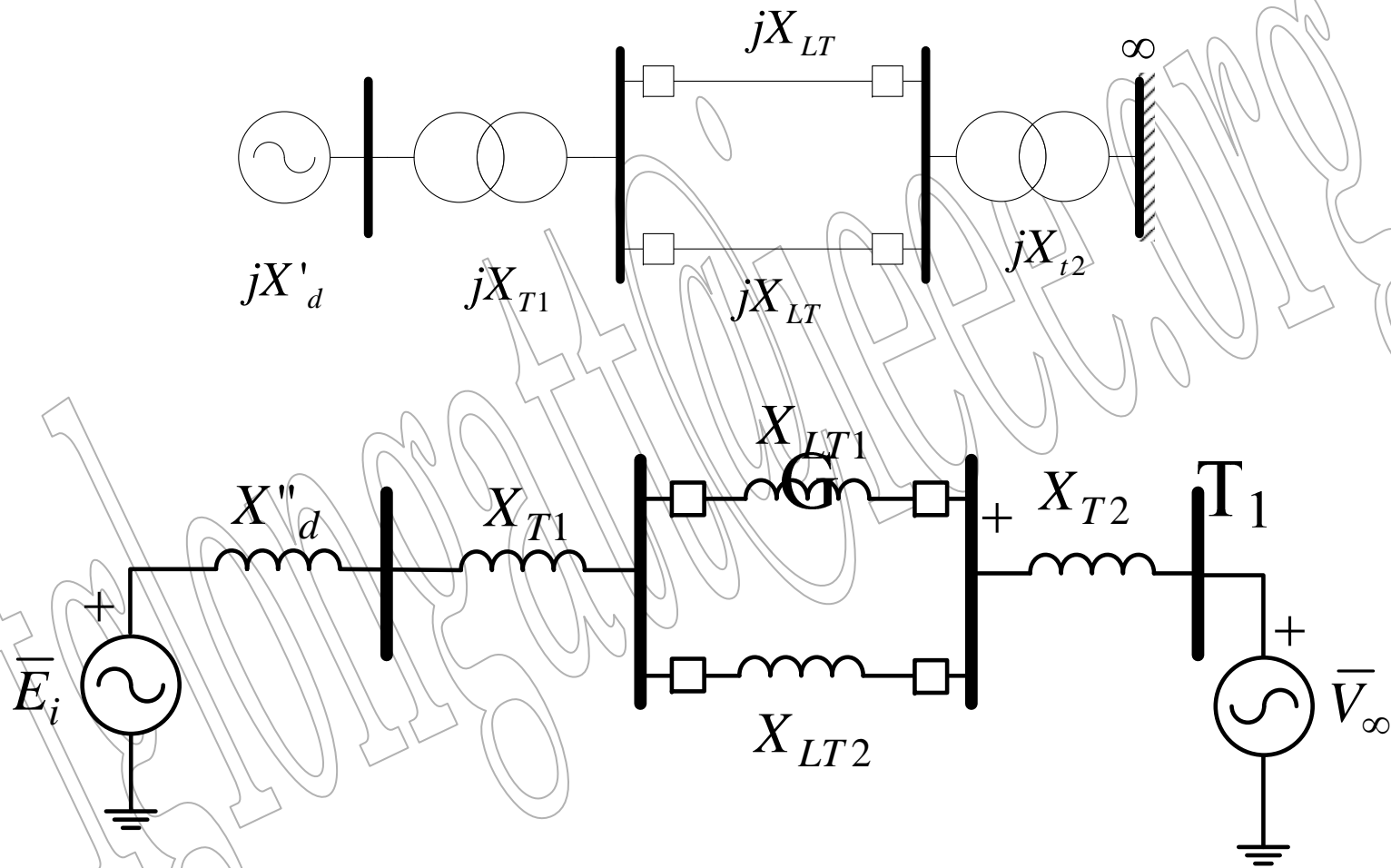
# Criterio de Áreas Iguales

- Para deducir el criterio de áreas iguales se hace para una máquina y una barra de potencia infinita, aunque las consideraciones efectuadas, pueden ser elevadas para el caso de un sistema general de dos máquinas



$$X_{G\infty} = X'_d + X_{T1} + X_{T2} + X_{LT1} // X_{LT2}$$

# Criterio de Áreas Iguales



$$X_{G\infty} = X'_d + X_{T1} + X_{T2} + X_{LT1} // X_{LT2}$$

# Criterio de Áreas Iguales

---

- Esta máquina puede oscilar, respecto a la barra de potencia infinita, cumpliendo con la ecuación de oscilación

$$\frac{2H}{\omega_s} \frac{d^2 \delta(t)}{dt^2} = P_{acel} = (P_{mec} - P_{elec})$$

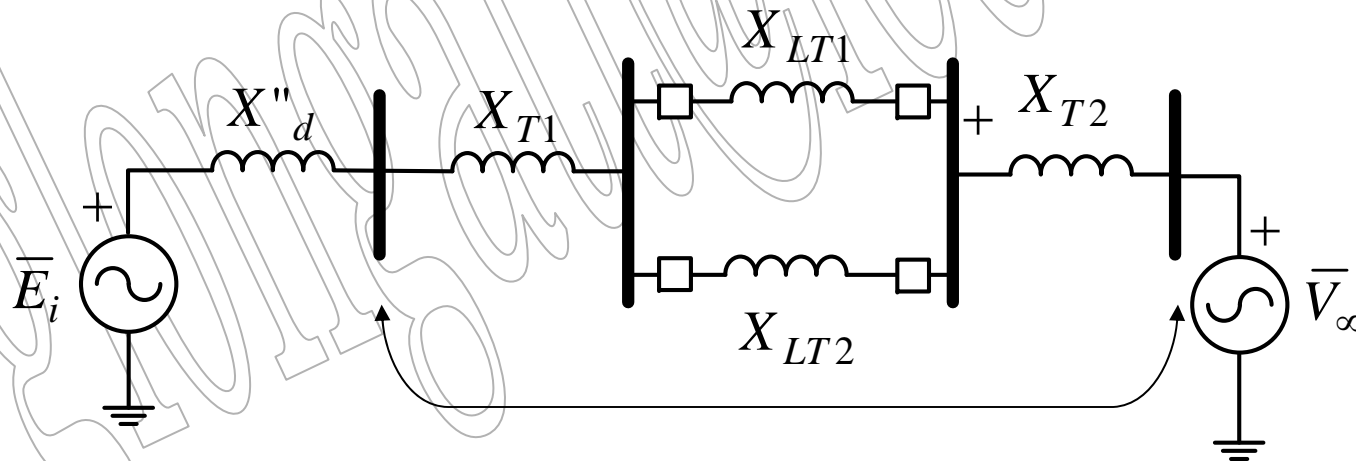
- Siendo la velocidad angular relativa del rotor a la velocidad sincrónica, dada por:

$$\omega_{rel} = \frac{d\delta(t)}{dt} = \omega(t) - \omega_s$$

# Criterio de Áreas Iguales

- La potencia eléctrica ( $P_{elec}$ ) entregada por la máquina es:

$$P_{elec} = \frac{|\bar{E}_i| |\bar{V}_\infty|}{X_{G\infty}} \text{sen} \delta(t)$$



$$X_{G\infty} = X'_d + X_{T1} + X_{T2} + X_{LT1} // X_{LT2}$$

# Criterio de Áreas Iguales

---

- La potencia eléctrica ( $P_{elec}$ ) entregada por la máquina es:

$$P_{elec} = \frac{|\overline{E}_i'| |\overline{V}_\infty|}{X_{G\infty}} \text{sen} \delta(t)$$

- Considerando lo anterior la ecuación de oscilación de la máquina conectada a la barra de potencia infinita es:

$$\frac{2H}{\omega_s} \frac{d^2 \delta(t)}{dt^2} = M \frac{d^2 \delta(t)}{dt^2} = P_{acel} = P_{mec} - P_{elec}$$



# Criterio de Áreas Iguales

---

- Antes de que exista la perturbación en la máquina, ésta se encuentra *operando en estado estable*.
- La potencia mecánica ( $P_{mec}$ ) inyectada al generador es igual a la potencia eléctrica de salida ( $P_{elec}$ ), por lo que la *potencia total acelerante es cero* ( $P_{acel}$ ).
- *Siempre que se desprece, las pérdidas por rozamiento mecánica, por fricción del aire, por corriente de Foucault, etc.*

# Criterio de Áreas Iguales

---

- Siempre que se desprecie, las pérdidas por rozamiento mecánica, por fricción del aire, por corriente de Foucault, etc.

$$P_{acel} = P_{mec} - P_{elec}$$

$$P_{acel} = 0$$

$$P_{mec} = P_{elec}$$

# Criterio de Áreas Iguales

---

- En estas *condiciones estables de operación*, la velocidad real del rotor  $\omega(t)$ , es igual a la velocidad sincrónica  $\omega_s$ , de modo que la velocidad relativa del rotor es cero.
- Esta máquina puede oscilar, respecto a la barra de potencia infinita, cumpliendo con la ecuación de oscilación:

$$\frac{2H}{\omega_s} \frac{d^2 \delta(t)}{dt^2} = P_{acel} = (P_{mec} - P_{elec})$$

# Criterio de Áreas Iguales

---

- Siendo la velocidad angular relativa del rotor a la velocidad sincrónica, dada por:

$$\omega_{rel} = \frac{d\delta(t)}{dt} = \omega(t) - \omega_s$$

- La potencia eléctrica ( $P_{elec}$ ) entregada por la máquina puede ser obtenida de la relación potencia ángulo:

$$P_{elec} = \frac{|\bar{E}'_i| |\bar{V}_\infty|}{X_{G\infty}} \text{sen} \delta(t)$$

# Criterio de Áreas Iguales

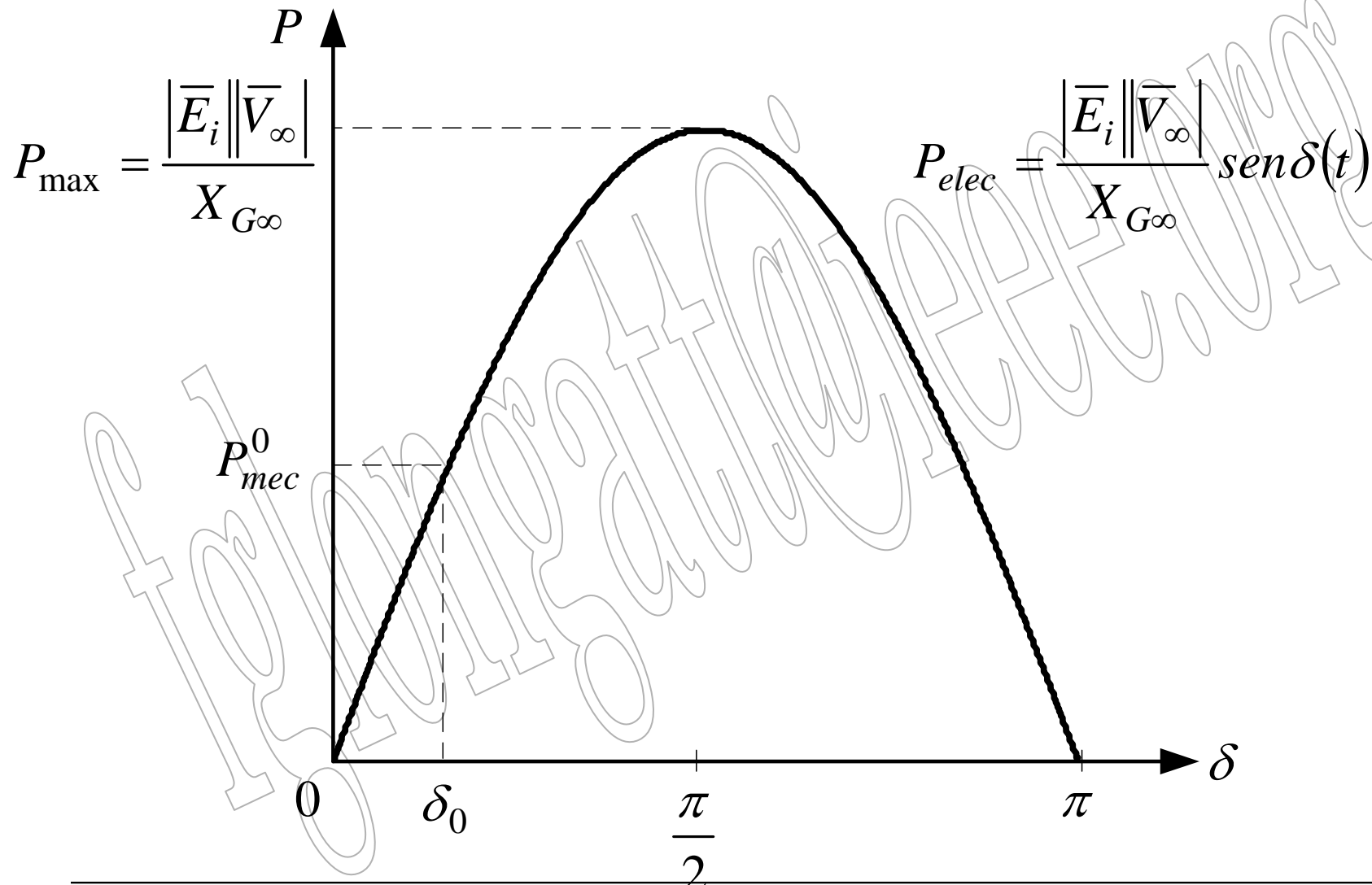
---

- Considerando lo anterior la ecuación de oscilación de la máquina conectada a la barra de potencia infinita es:

$$\frac{2H}{\omega_s} \frac{d^2 \delta(t)}{dt^2} = M \frac{d^2 \delta(t)}{dt^2} = P_{acel} = P_{mec} - P_{elec}$$

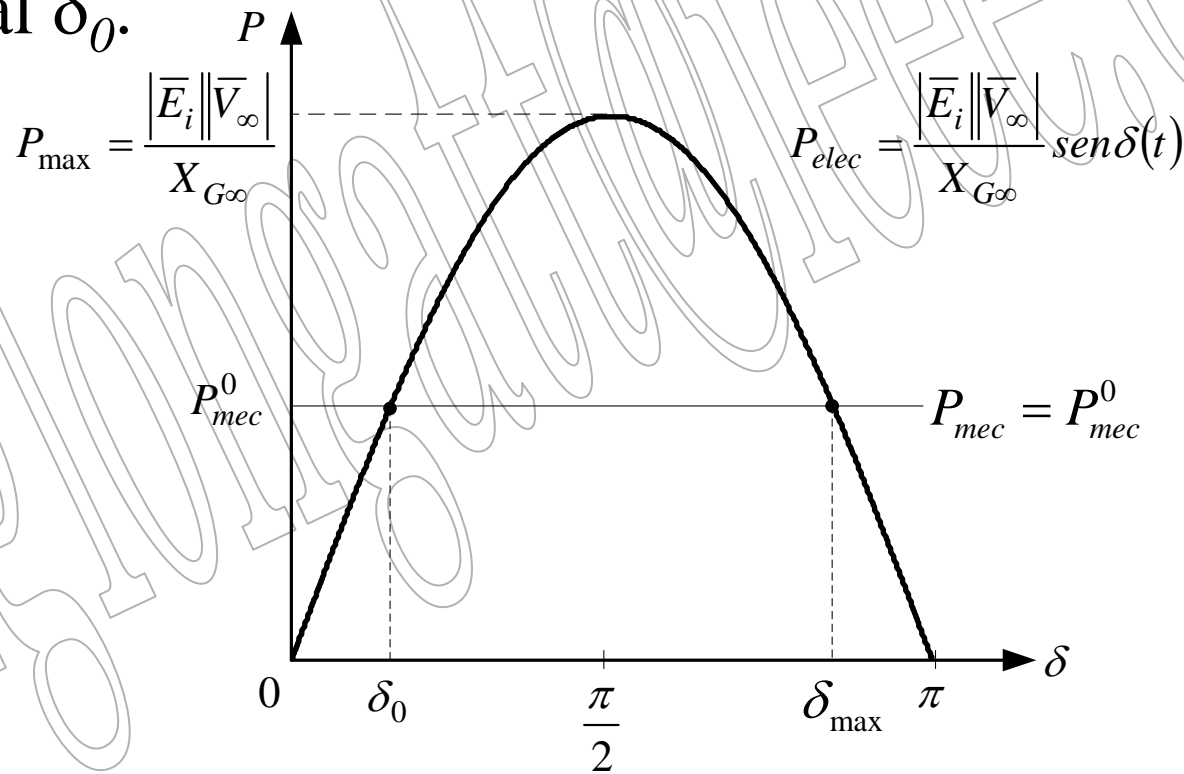
$$M \frac{d^2 \delta(t)}{dt^2} = P_{acel} = P_{mec} - \frac{|\bar{E}_i| |\bar{V}_\infty|}{X_{G\infty}} \text{sen} \delta(t)$$

# Criterio de Áreas Iguales

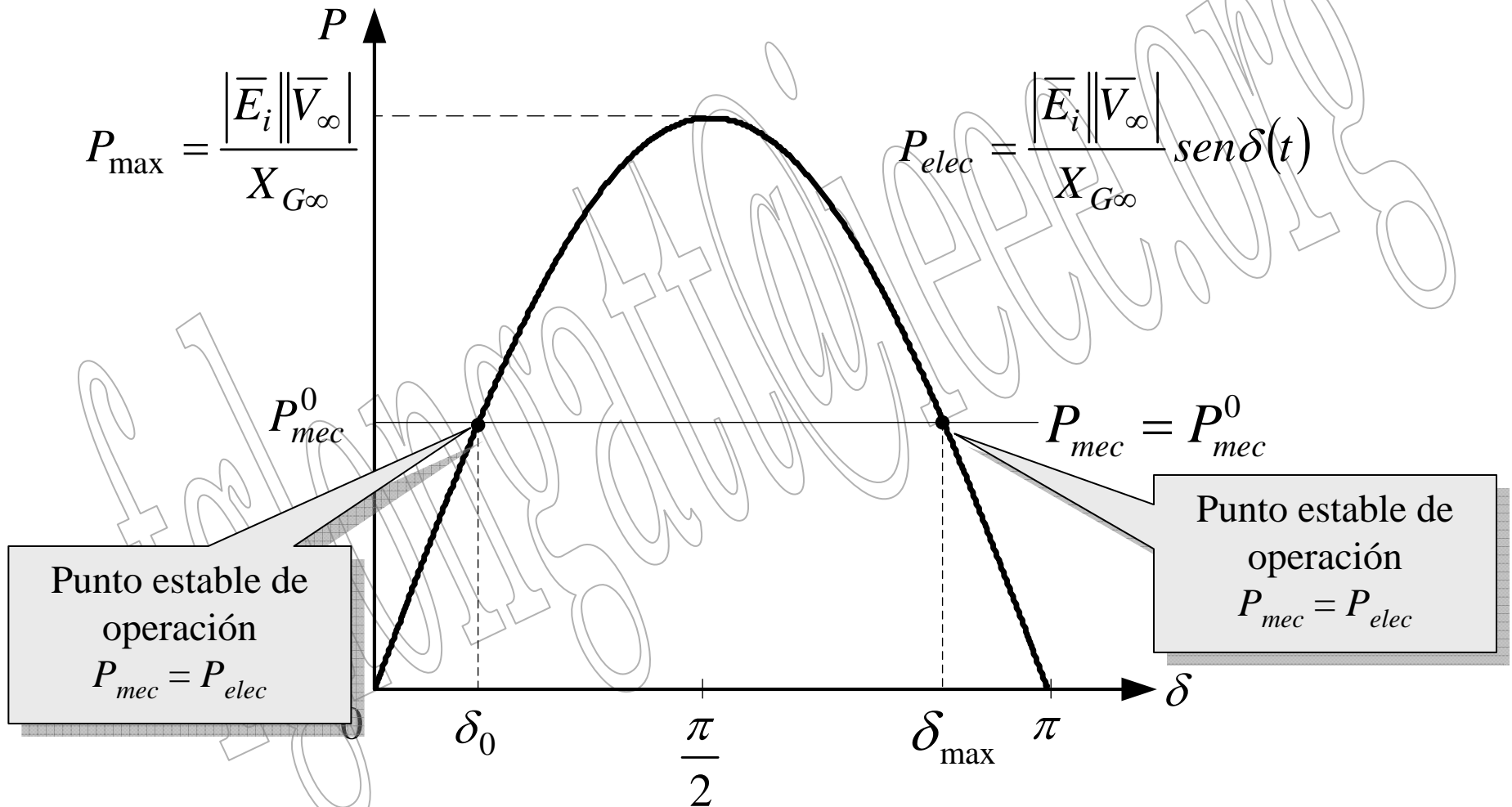


# Criterio de Áreas Iguales

- Supóngase que ésta posición de equilibrio entre las potencias mecánica y eléctrica (despreciando las pérdidas) ocurre para un cierto ángulo de potencia inicial  $\delta_0$ .



# Criterio de Áreas Iguales





# Criterio de Áreas Iguales

---

- Multiplíquese en ambos miembros de la ecuación de oscilación de la máquina por la primera derivada del ángulo de potencia respecto al tiempo, resulta:

$$\frac{d\delta(t)}{dt} M \frac{d^2\delta(t)}{dt^2} = (P_{mec} - P_{elec}) \frac{d\delta(t)}{dt}$$

- Ahora, se conoce por teoría de cálculo diferencial:

$$\frac{d([f(t)]^2)}{dt} = 2f(t) \frac{df(t)}{dt}$$

# Criterio de Áreas Iguales

---

- Ahora, se conoce por teoría de cálculo diferencial:

$$\frac{d\left([f(t)]^2\right)}{dt} = 2f(t) \frac{df(t)}{dt}$$

- Si se considera:

$$f(t) = \frac{d\delta(t)}{dt}$$

$$\frac{d\left(\left[\frac{d\delta(t)}{dt}\right]^2\right)}{dt} = 2 \frac{d\delta(t)}{dt} \frac{d^2\delta(t)}{dt^2}$$

# Criterio de Áreas Iguales

---

$$\frac{1}{2} \frac{d \left( \left[ \frac{d\delta(t)}{dt} \right]^2 \right)}{dt} = \frac{d\delta(t)}{dt} \frac{d^2\delta(t)}{dt^2}$$

- El primer término de la ecuación anterior, puede ser reescrito, de una manera más simple como:

$$\frac{d\delta(t)}{dt} M \frac{d^2\delta(t)}{dt^2} = \frac{M}{2} \frac{d \left( \left[ \frac{d\delta(t)}{dt} \right]^2 \right)}{dt} = (P_{mec} - P_{elec}) \frac{d\delta(t)}{dt}$$

# Criterio de Áreas Iguales

---

- Multiplicando en ambos miembros de la ecuación por diferencial de tiempo se tiene:

$$d\left(\left[\frac{d\delta(t)}{dt}\right]^2\right) = 2 \frac{(P_{mec} - P_{elec})}{M} d\delta(t)$$

# Criterio de Áreas Iguales

---

$$d\left(\left[\frac{d\delta(t)}{dt}\right]^2\right) = 2 \frac{(P_{mec} - P_{elec})}{M} d\delta(t)$$

- Si se integra con respecto al tiempo:

$$\left[\frac{d\delta(t)}{dt}\right]^2 = \int_{\delta_0}^{\delta_1} 2 \frac{(P_{mec} - P_{elec})}{M} d\delta(t)$$

$$\left[\frac{d\delta(t)}{dt}\right] = \sqrt{\int_{\delta_0}^{\delta_1} 2 \frac{(P_{mec} - P_{elec})}{M} d\delta(t)}$$

# Criterio de Áreas Iguales

---

- La integral plantada dentro del radical, se una integral definida evaluada entre el ángulo  $\delta_0$ , el cual corresponde al ángulo de potencia de la máquina cuando ésta funciona sincrónicamente antes que se produzca la perturbación, es decir  $d\delta(t)/dt = 0$ .

$$\left[ \frac{d\delta(t)}{dt} \right] = \sqrt{\int_{\delta_0}^{\delta_1} 2 \frac{(P_{mec} - P_{elec})}{M} d\delta(t)}$$

$$\sqrt{\int_{\delta_0}^{\delta_1} 2 \frac{(P_{mec} - P_{elec})}{M} d\delta(t)} = 0$$

# Criterio de Áreas Iguales

---

- En general el ángulo de potencia  $\delta(t)$  dejará de oscilar y la máquina volverá a funcionar sincrónicamente después de la perturbación cuando  $d\delta(t)/dt = 0$ , o mejor escrito:

$$\left[ \frac{d\delta(t)}{dt} \right]^2 = \sqrt{\int_{\delta_0}^{\delta_1} 2 \frac{(P_{mec} - P_{elec})}{M} d\delta(t)}$$

# Criterio de Áreas Iguales

---

- Se puede justificar que la máquina no permanecerá estática, respecto a la barra de potencia infinita, la primera vez que  $d\delta(t)/dt$  se anule.
- El hecho de que por un instante el ángulo de potencia deje de oscilar, puede ser interpretado como una indicación de estabilidad.
- La interpretación geométrica de la derivada; el hecho de que  $d\delta(t)/dt$  se anule, corresponde al punto en que la curva de oscilación de la máquina cuando el ángulo  $\delta(t)$  alcanza el máximo y empieza a disminuir.



# Sistemas de Potencia II

---

## Análisis de Estabilidad

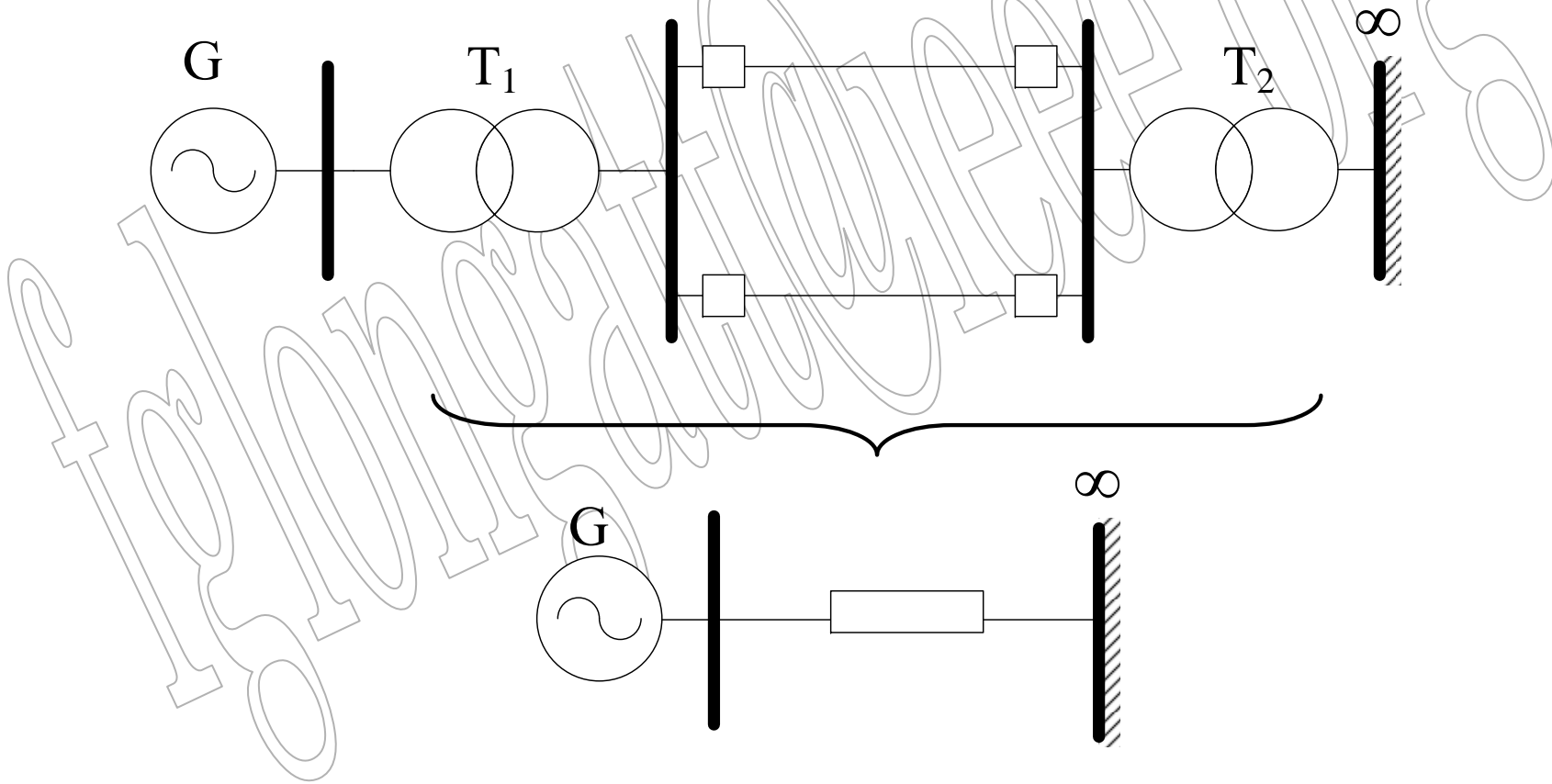


Criterio de Áreas Iguales

- Aplicación Ilustrativa -

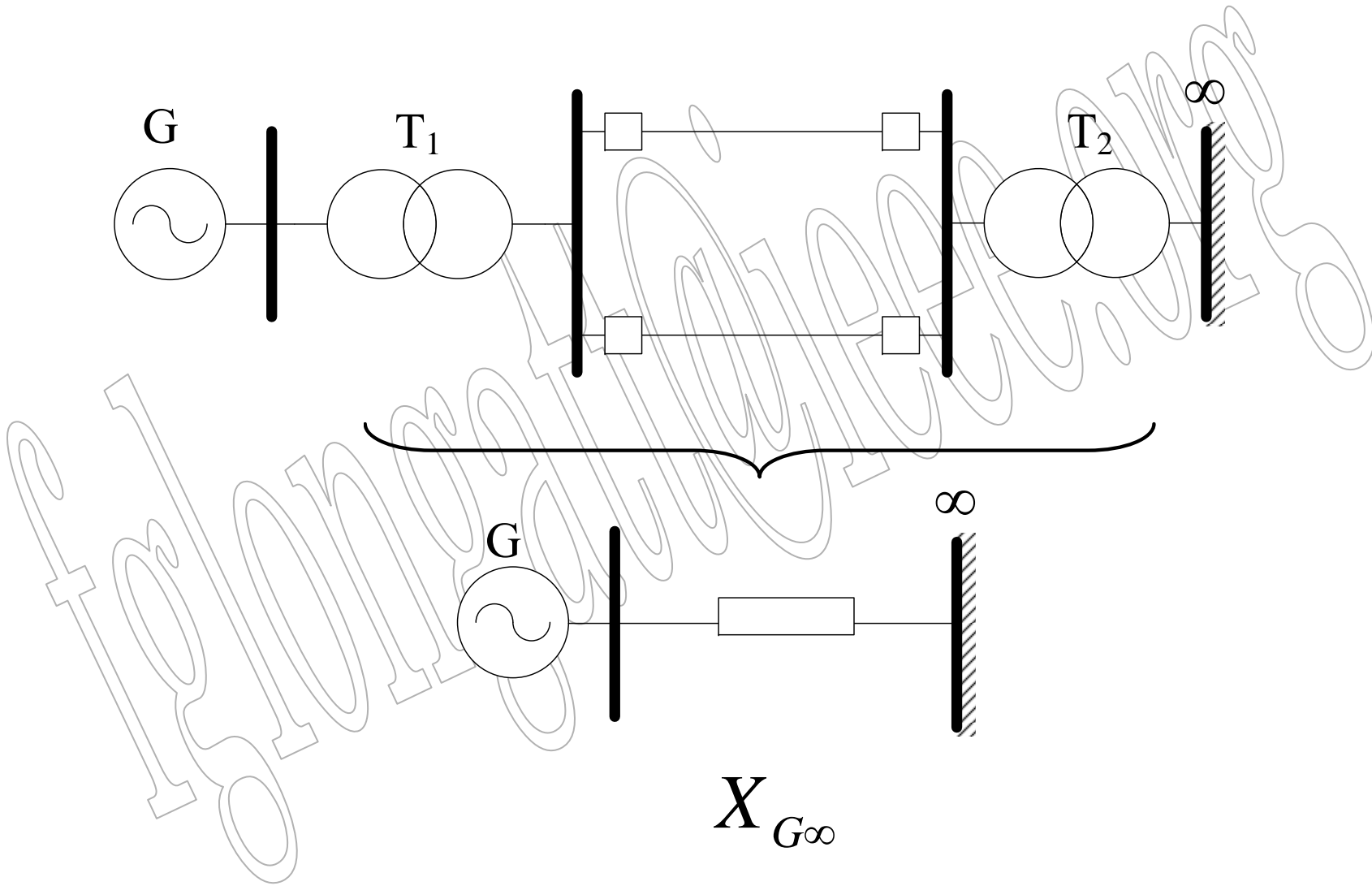
# CAI Aplicación Ilustrativa

- Considérese una máquina síncrona operando como generador conectada a una barra de potencia infinita.



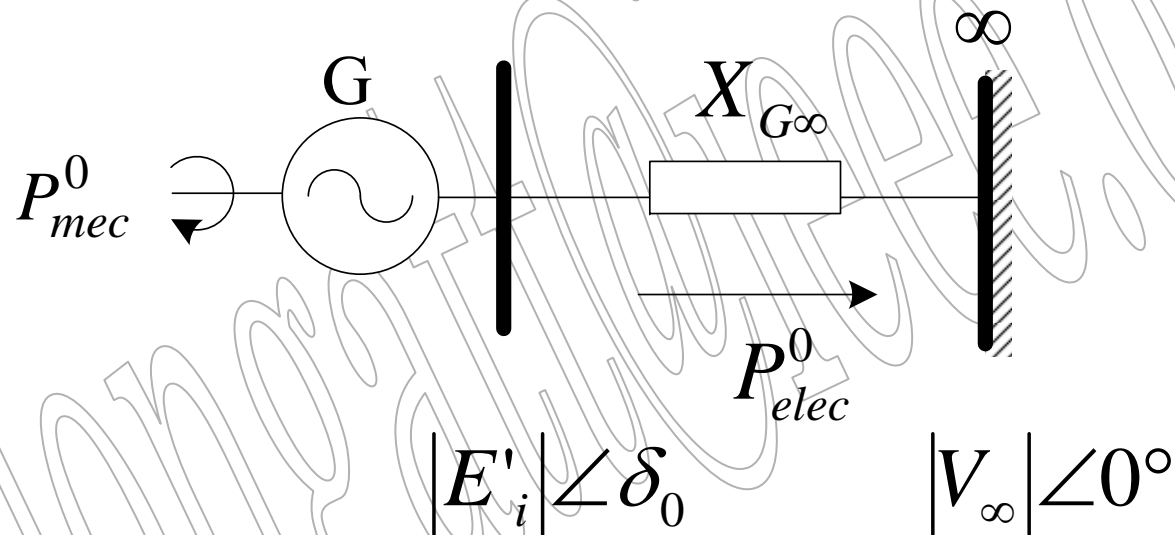
# CAI Aplicación Ilustrativa

---



# CAI Aplicación Ilustrativa

- Considérese una máquina síncrona operando como generador conectada a una barra de potencia infinita

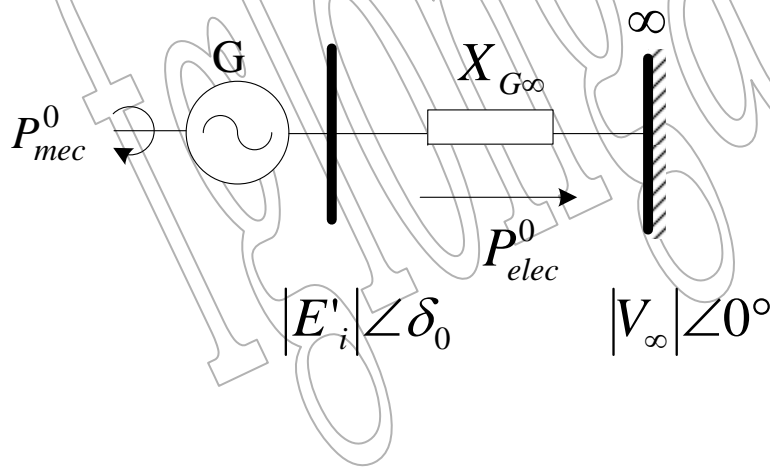


- Funciona en sincronismo con un ángulo de potencia inicial  $\delta_0$  para la cual entrega una cierta potencia eléctrica  $P_{elec}$

# CAI Aplicación Ilustrativa

- Funciona en sincronismo con un ángulo de potencia inicial  $\delta_0$  para la cual entrega una cierta potencia eléctrica que puede ser escrita en forma general como:

$$P_{mec} = P_{elec} = \frac{|\overline{E}'_i| |\overline{V}_\infty|}{X_{G\infty}} \text{sen} \delta(t)$$



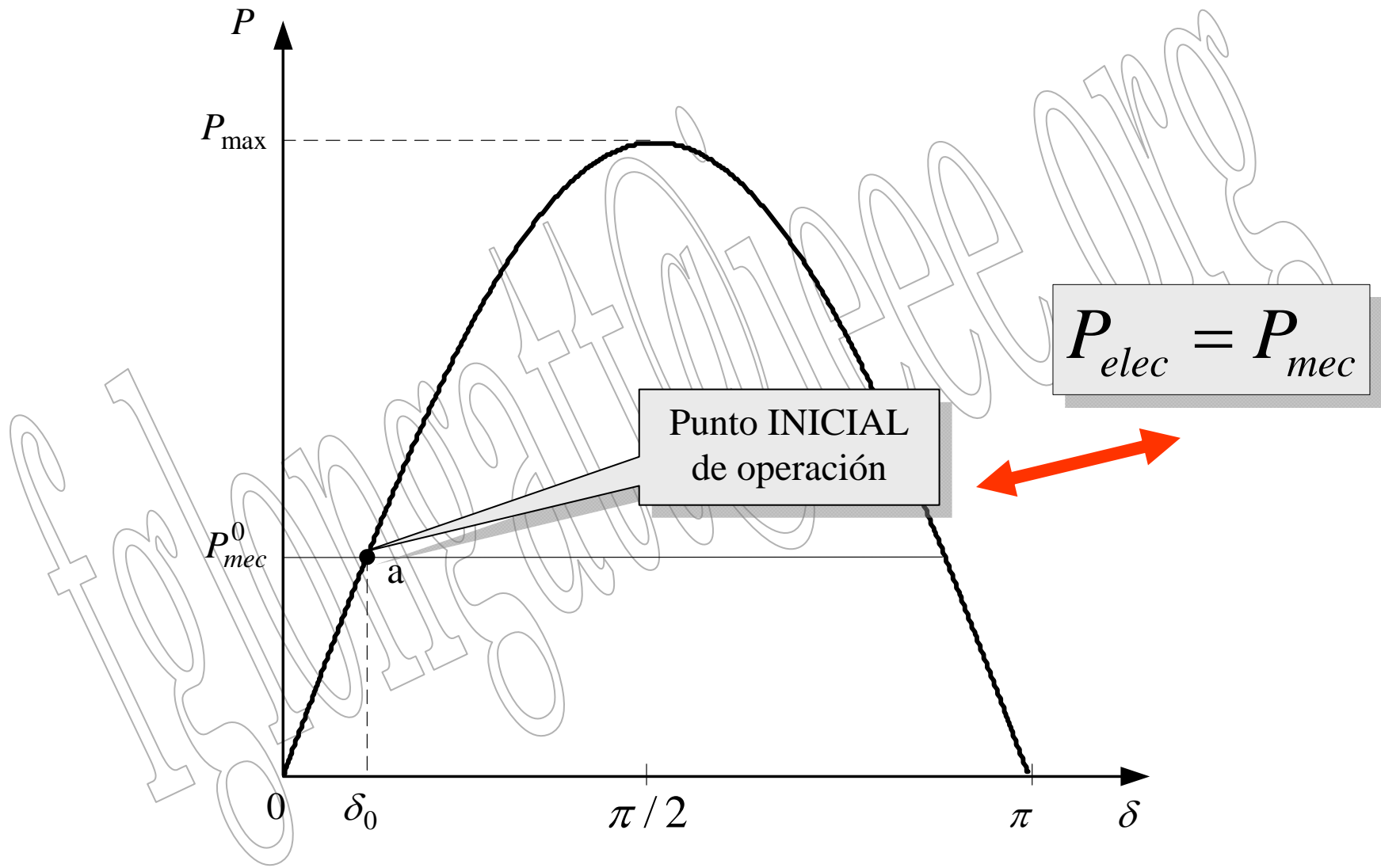
# CAI Aplicación Ilustrativa

---

- Si se consideran despreciables las pérdidas de la máquina, tales como fricción mecánica y roce del aire, además de las corrientes de Foucault, la potencia mecánica ( $P_{mec0}$ ) y la eléctrica ( $P_{elec0}$ ) en la máquina son iguales, para un *estado de operación normal*.

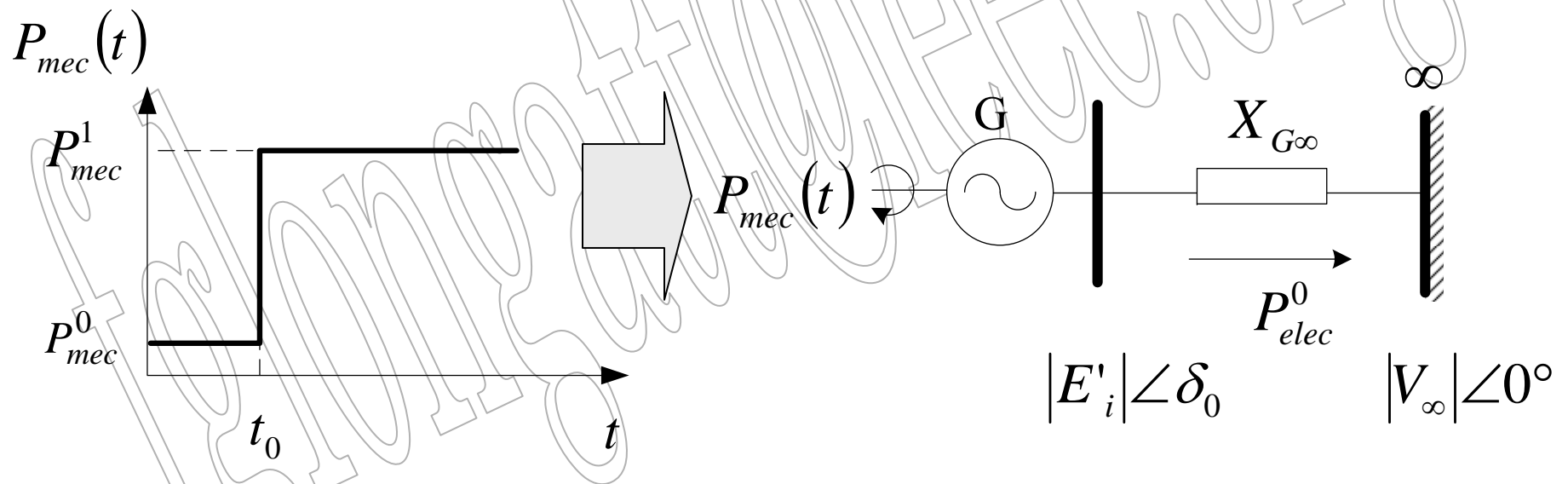
$$P_{mec} = P_{elec} = \frac{|\overline{E}_i| |\overline{V}_\infty|}{X_{G\infty}} \text{sen} \delta(t)$$

# CAI Aplicación Ilustrativa



# CAI Aplicación Ilustrativa

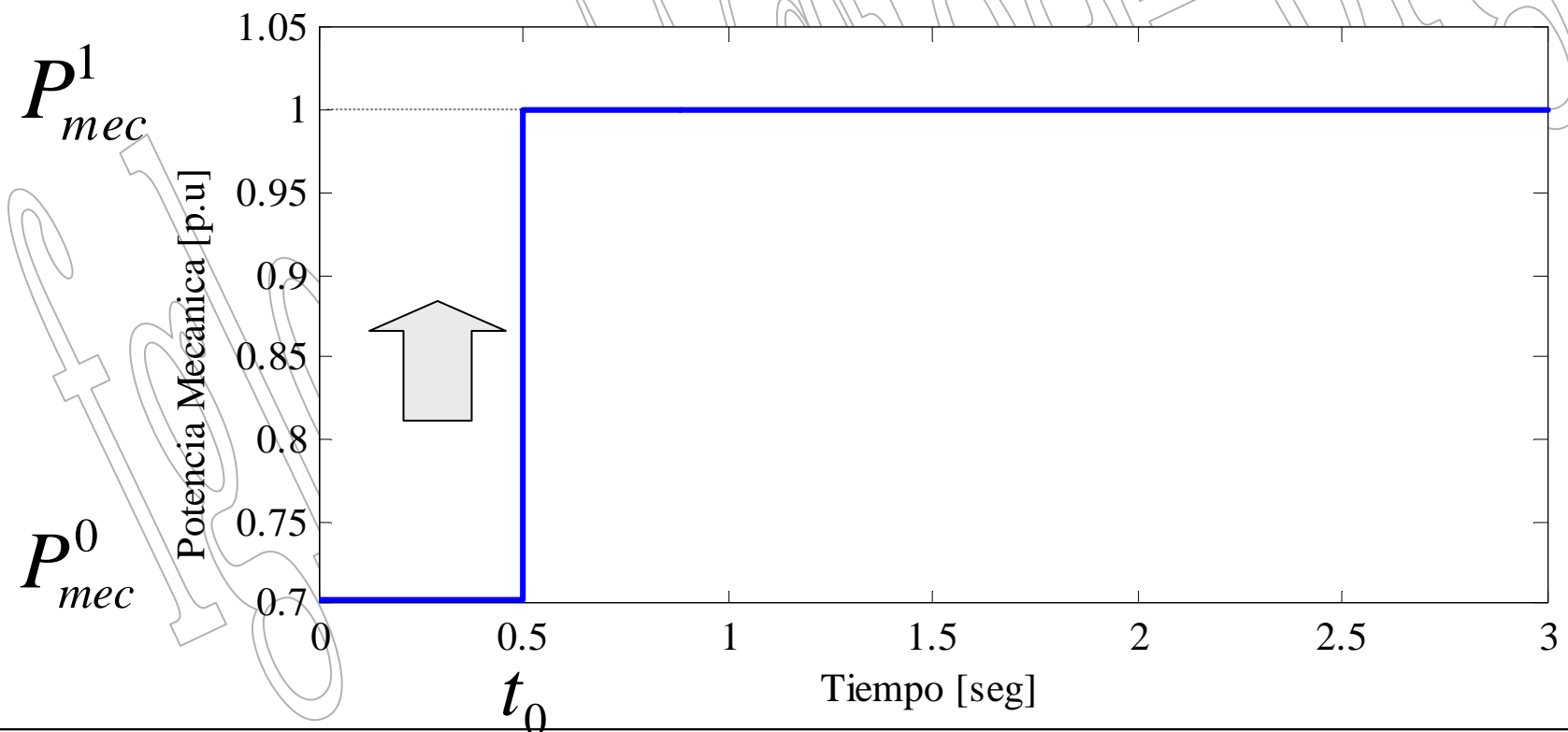
- Supóngase que la potencia mecánica a la entrada del generador es aumentada bruscamente, pasando instantáneamente de  $P_{mec0}$  a  $P_{mec1}$ .





# CAI Aplicación Ilustrativa

- Supóngase que la potencia mecánica a la entrada del generador es aumentada bruscamente, pasando instantáneamente de  $P_{mec0}$  a  $P_{mec1}$ .

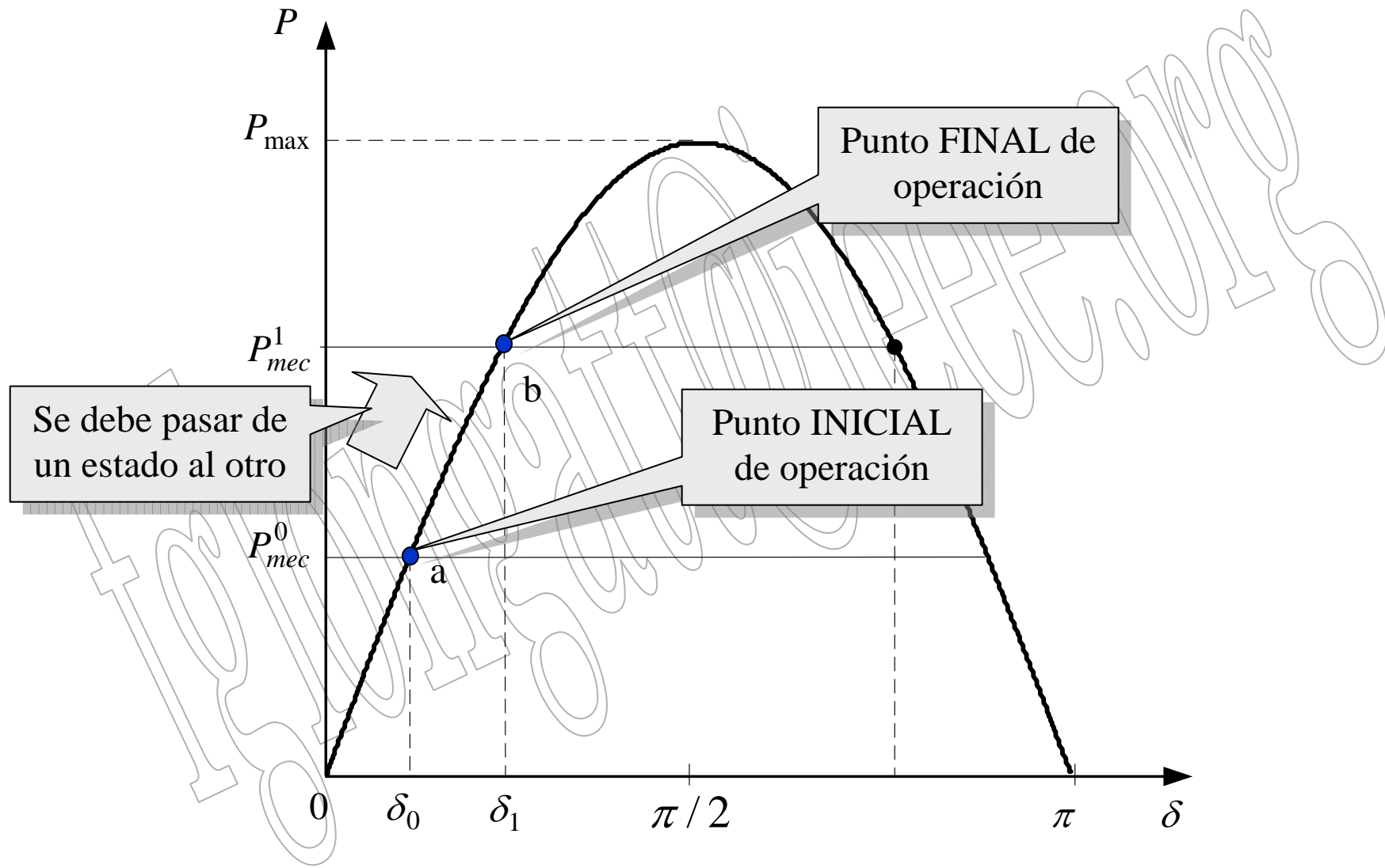


# CAI Aplicación Ilustrativa

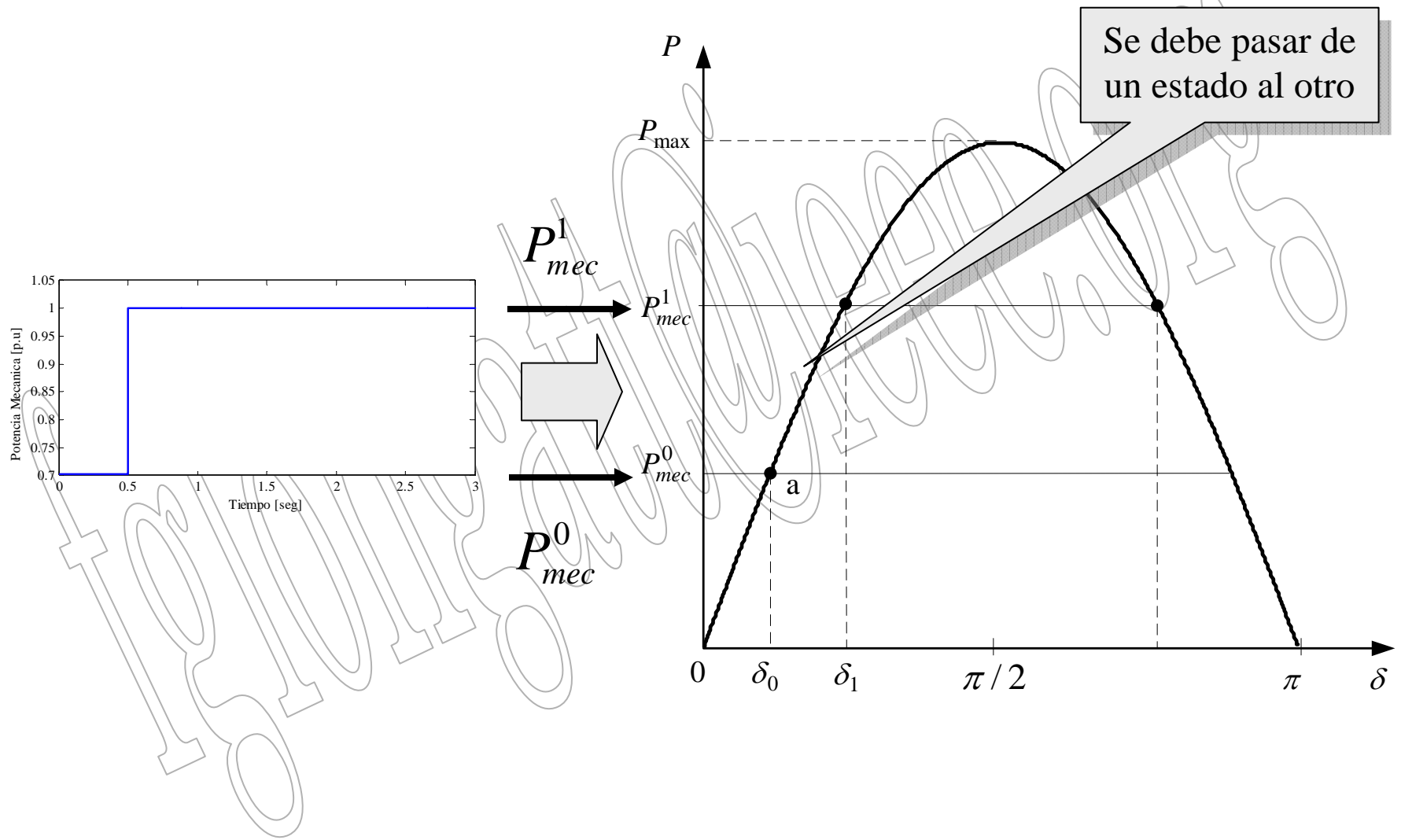
---

- Evidentemente la barra de potencia infinita no puede absorber cualquier cambio de potencia eléctrica mientras el voltaje y la frecuencia permanezcan constantes.
- La diferencia que existe entre la potencia mecánica y la potencia eléctrica, se traduce en una potencia de aceleración ( $P_{acel}$ ), que almacena en el rotor en forma de energía cinética; ocasionando un aumento de la velocidad del rotor, con lo que el ángulo de potencia aumenta desde  $\delta_0$  hasta un nuevo valor.

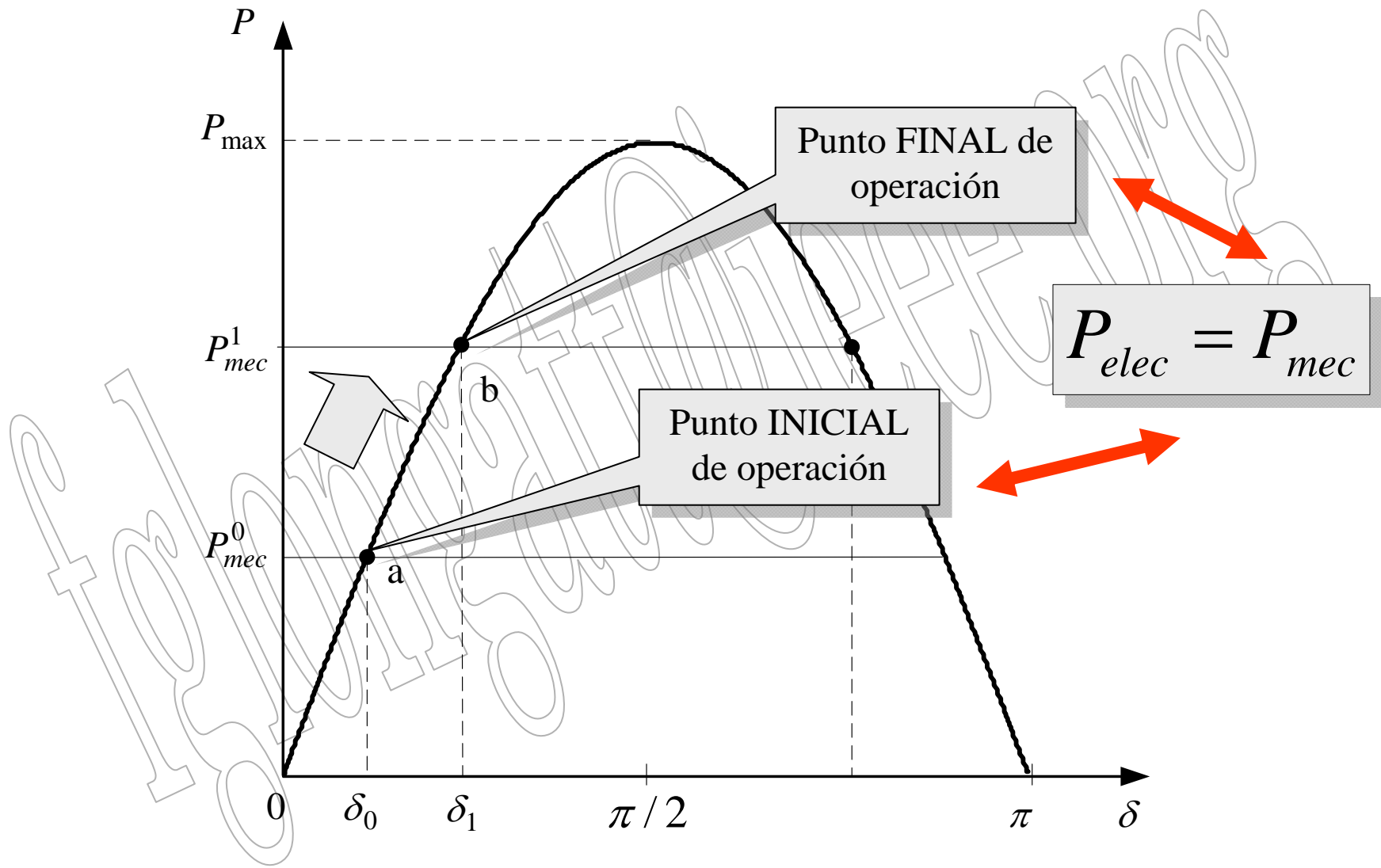
# CAI Aplicación Ilustrativa



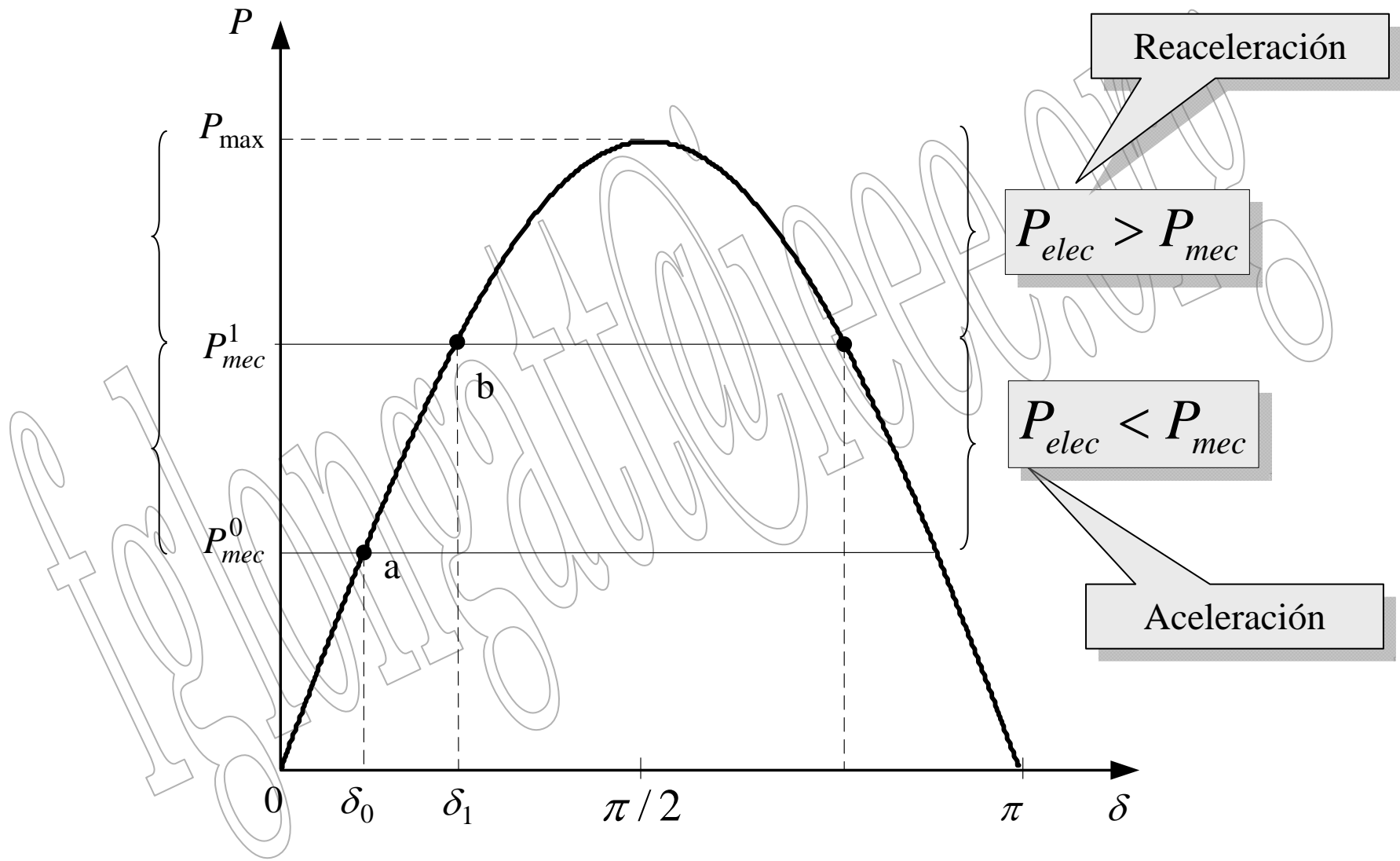
# CAI Aplicación Ilustrativa



# CAI Aplicación Ilustrativa

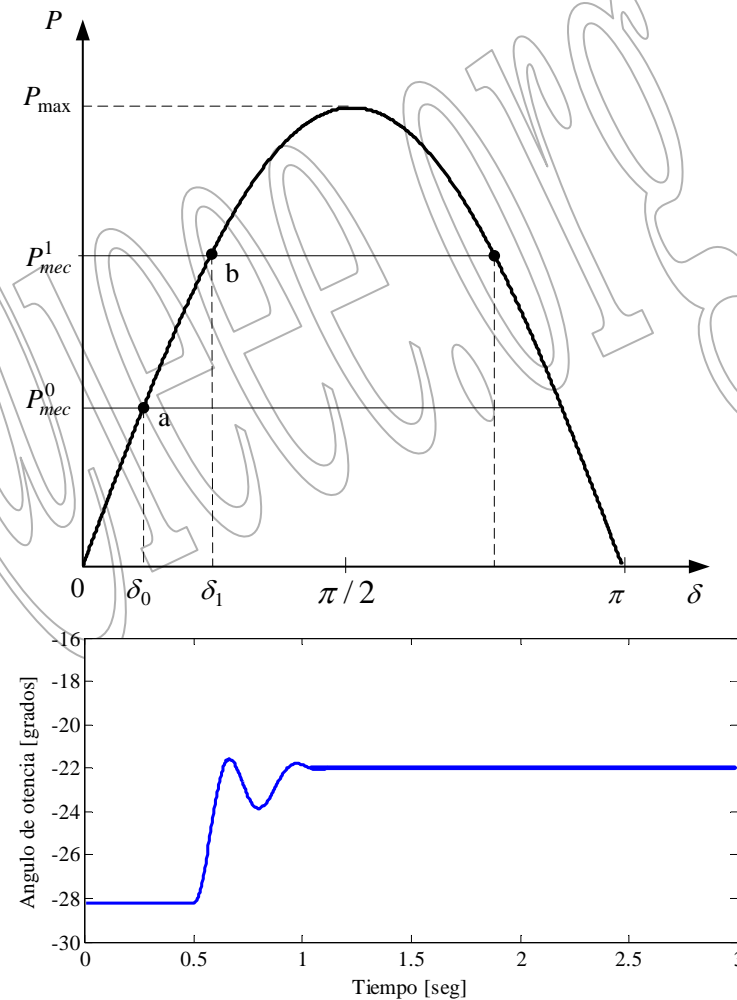


# CAI Aplicación Ilustrativa

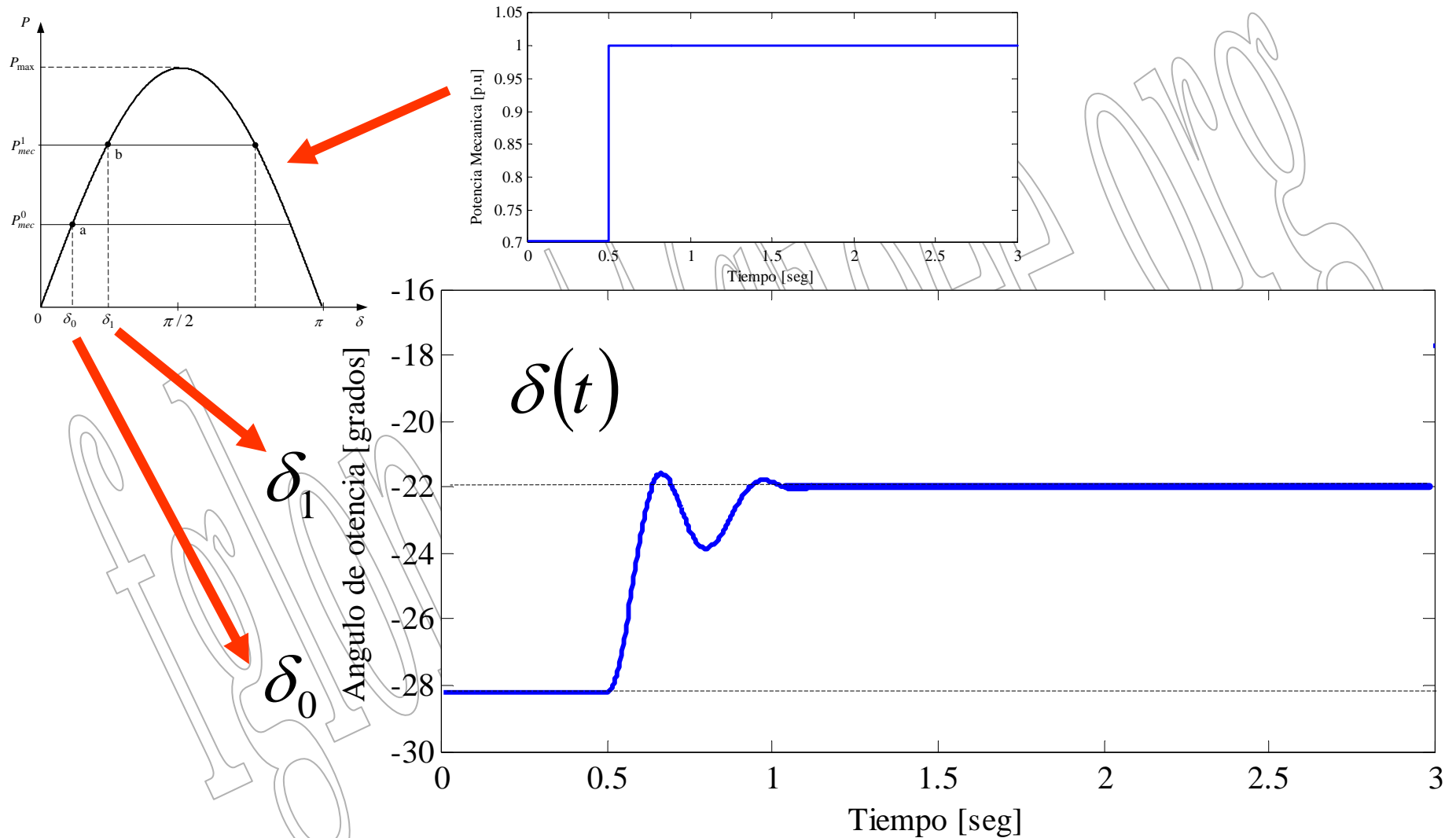


# CAI Aplicación Ilustrativa

- El sistema giratorio rotórico, continuará en aceleración siempre que la potencia mecánica inyectada en el eje del rotor sea mayor que la potencia eléctrica entregada en el generador, es decir desde el punto "a", hasta el punto "b"; con lo que se aumenta el ángulo de potencia desde  $\delta_0$  hasta  $\delta_1$ .

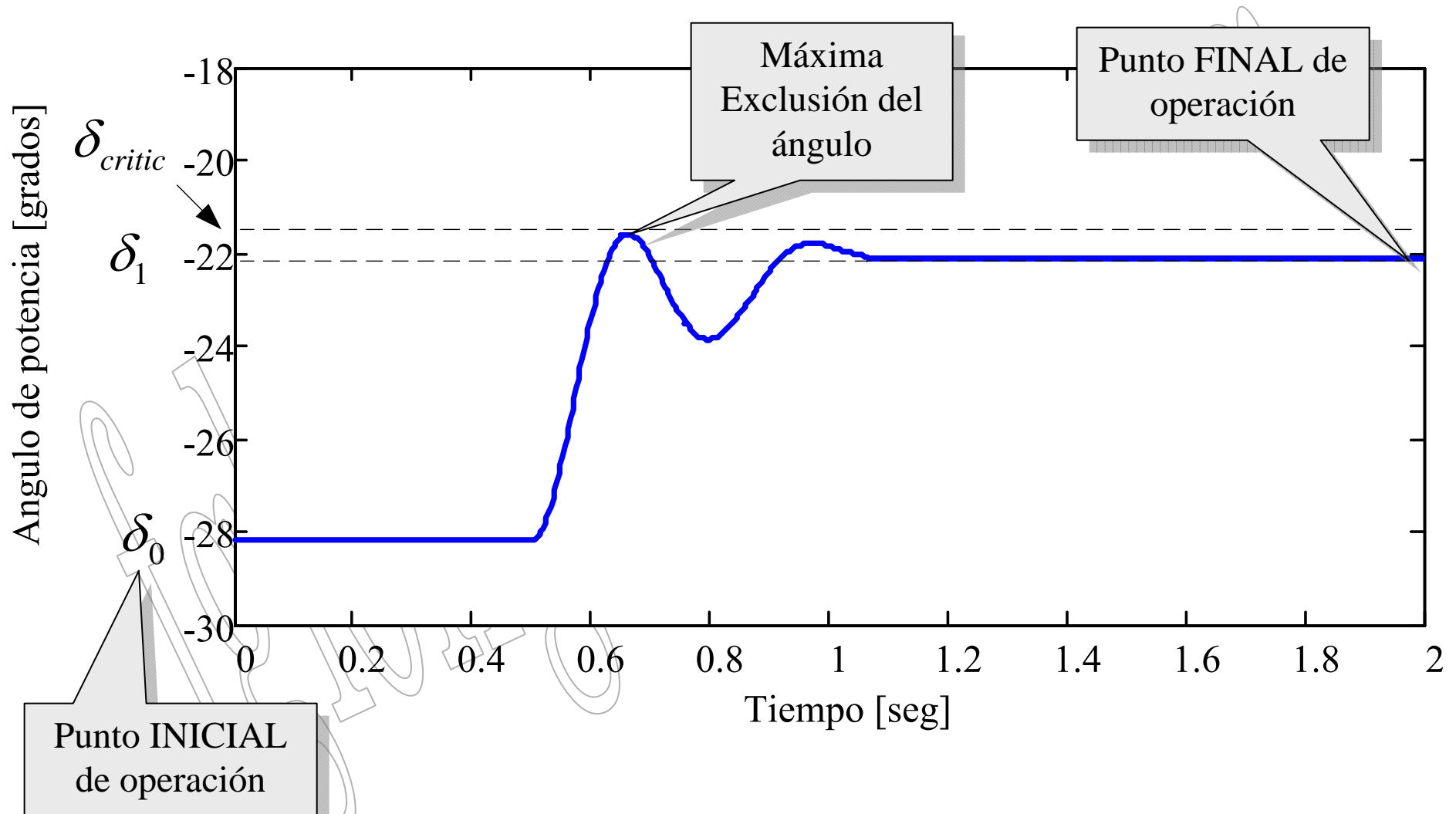


# CAI Aplicación Ilustrativa

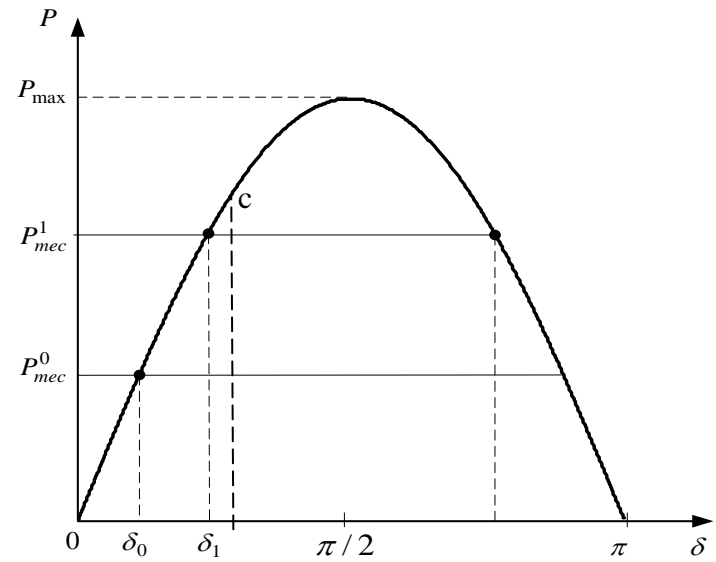
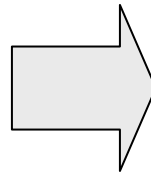
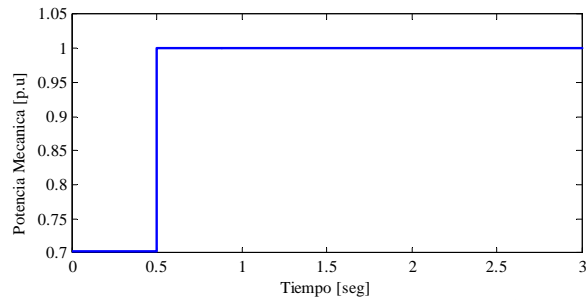




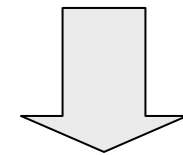
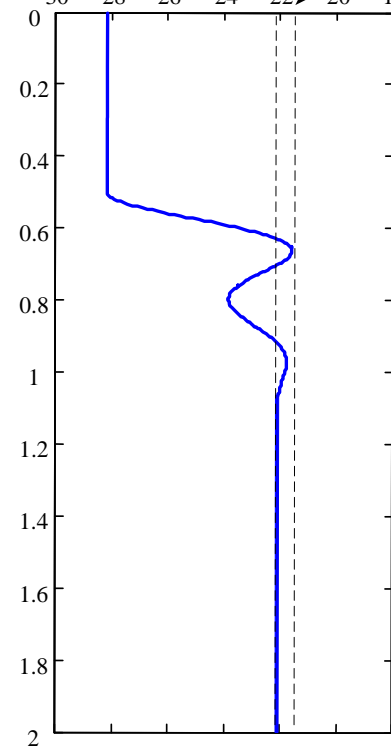
# CAI Aplicación Ilustrativa



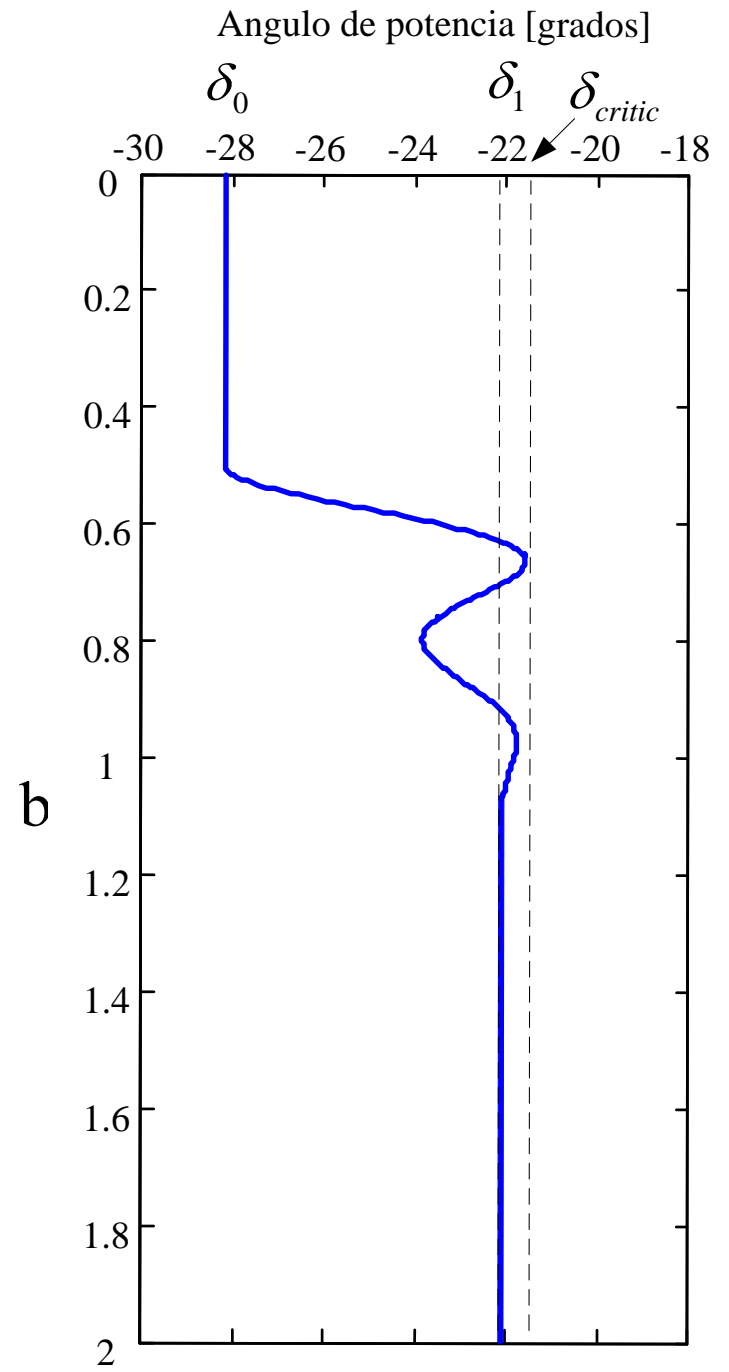
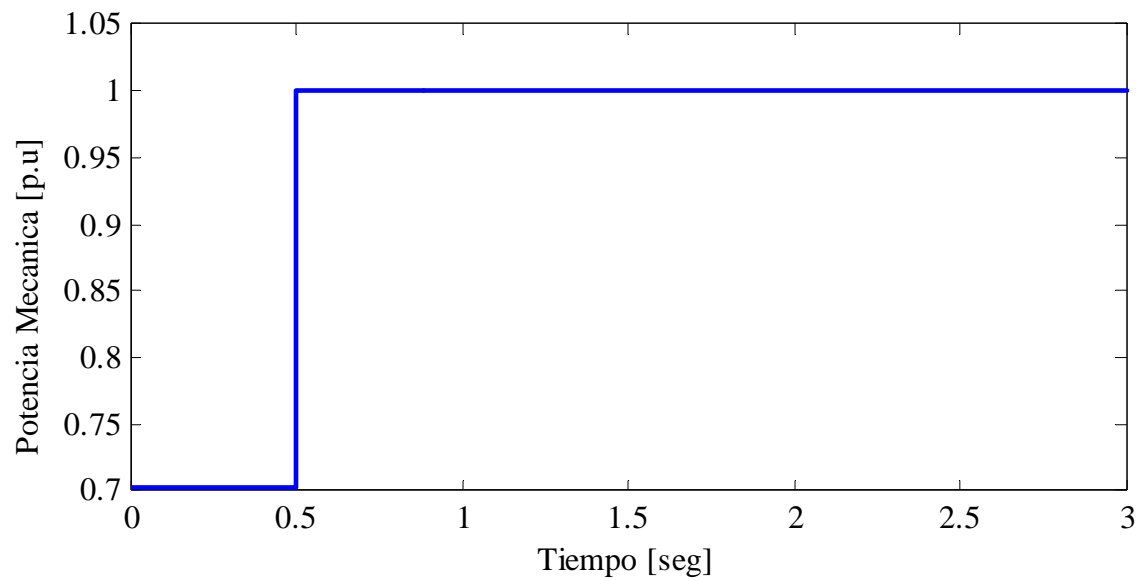
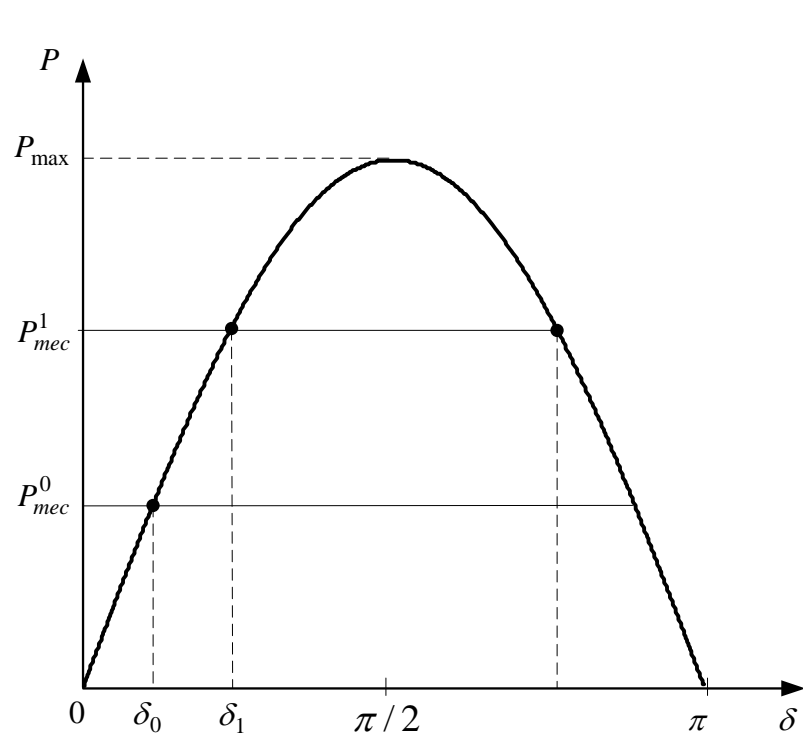
$$P_{mec}(t)$$



Angulo de potencia [grados]  
 $\delta_0$   $\delta_1$   $\delta_{critic}$



$$\delta(t)$$



# CAI Aplicación Ilustrativa

---

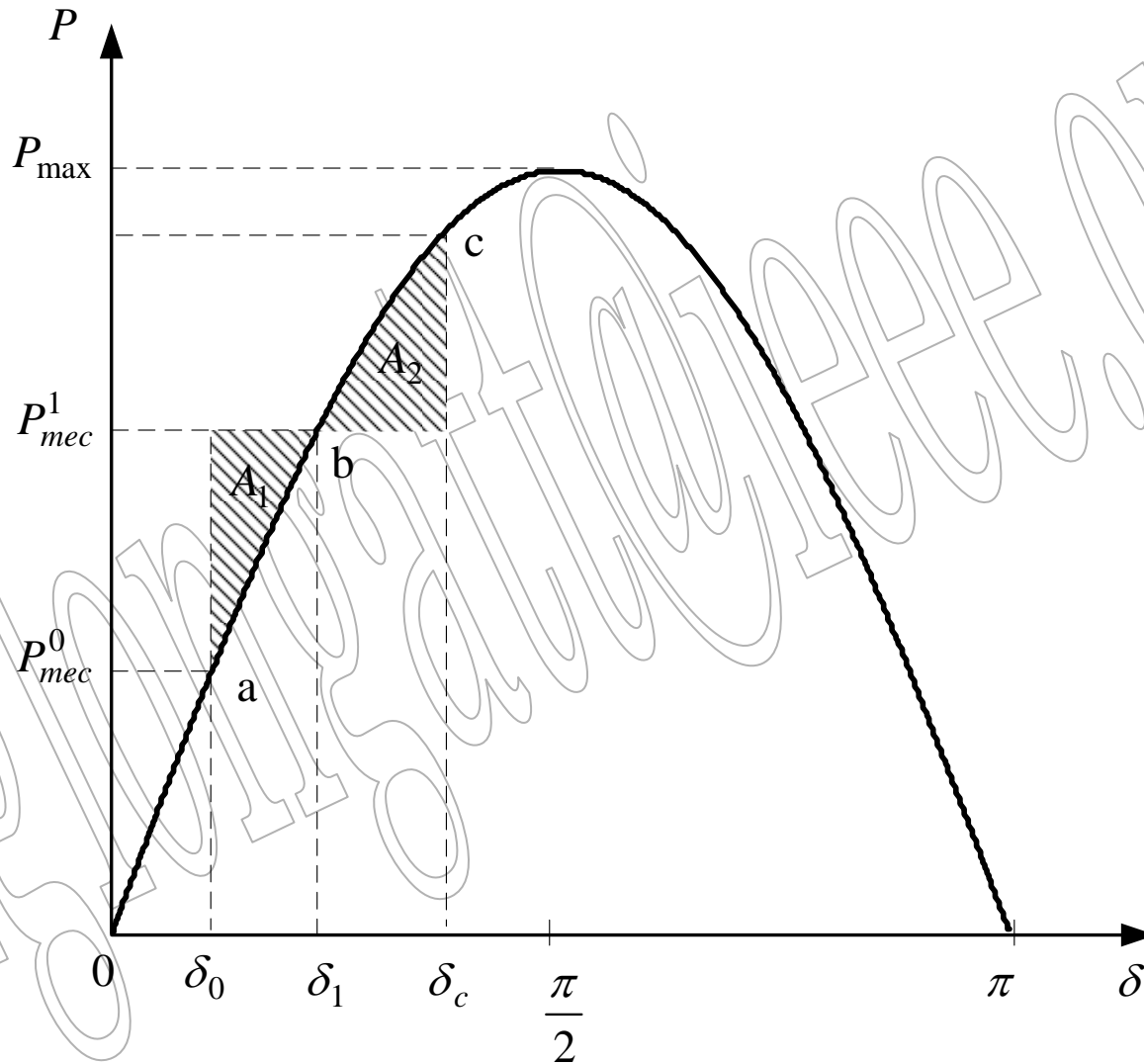
- Evidentemente la barra de potencia infinita no puede absorber cualquier cambio de potencia eléctrica mientras el voltaje y la frecuencia permanezcan constantes.
- La diferencia que existe entre la potencia mecánica y la potencia eléctrica, se traduce en una potencia de aceleración ( $P_{acel}$ ), que almacena en el rotor en forma de energía cinética; ocasionando un aumento de la velocidad del rotor, con lo que el ángulo de potencia aumenta desde  $\delta_0$  hasta un nuevo valor.

# CAI Aplicación Ilustrativa

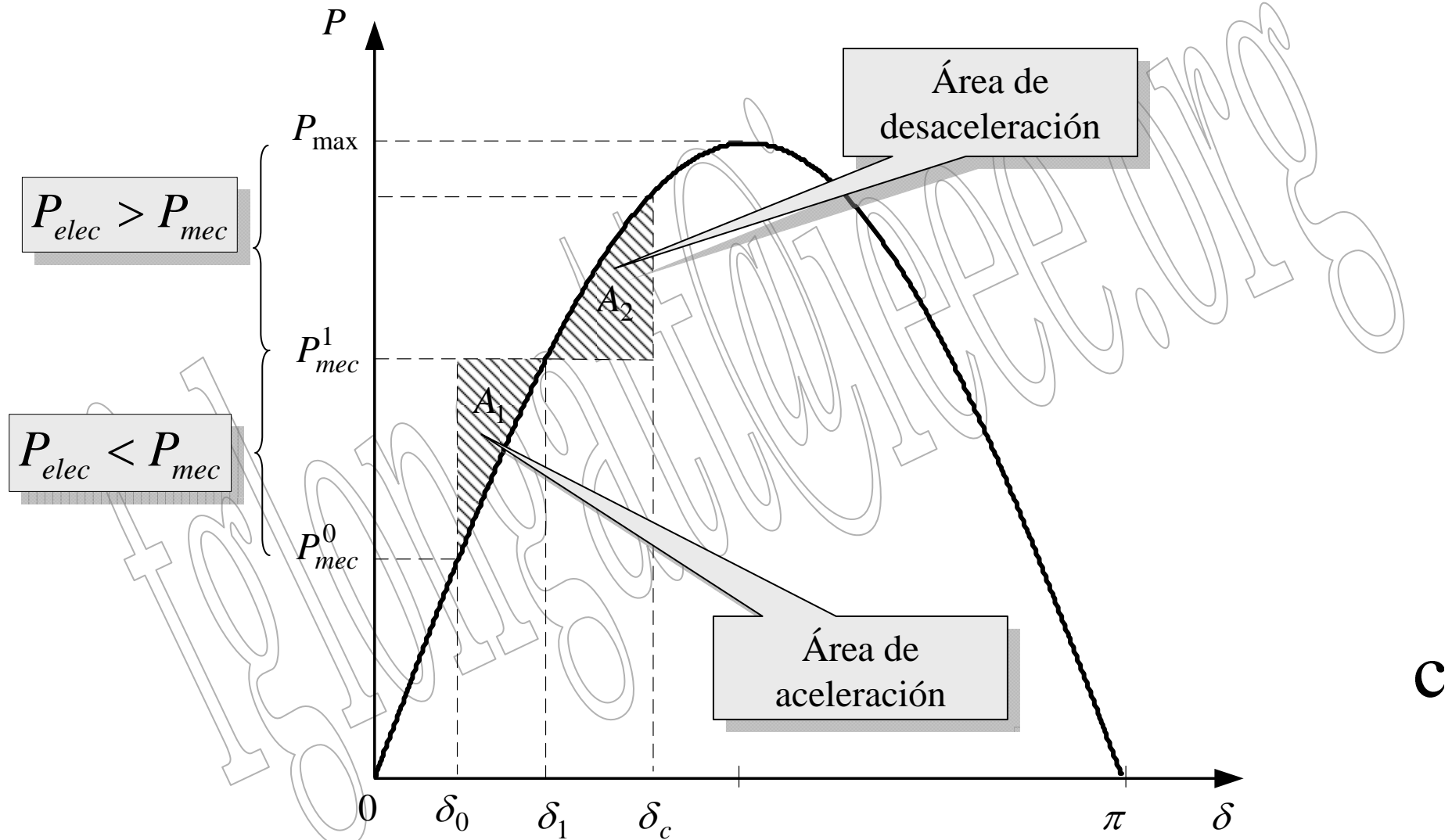
---

- El sistema giratorio rotorico, continuará en aceleración siempre que la potencia mecánica inyectada en el eje del rotor sea mayor que la potencia eléctrica entregada en el generador, es decir desde el punto "a", hasta el punto "b"; con lo que se aumenta el ángulo de potencia desde  $\delta_0$  hasta  $\delta_1$ .

# CAI Aplicación Ilustrativa



# CAI Aplicación Ilustrativa

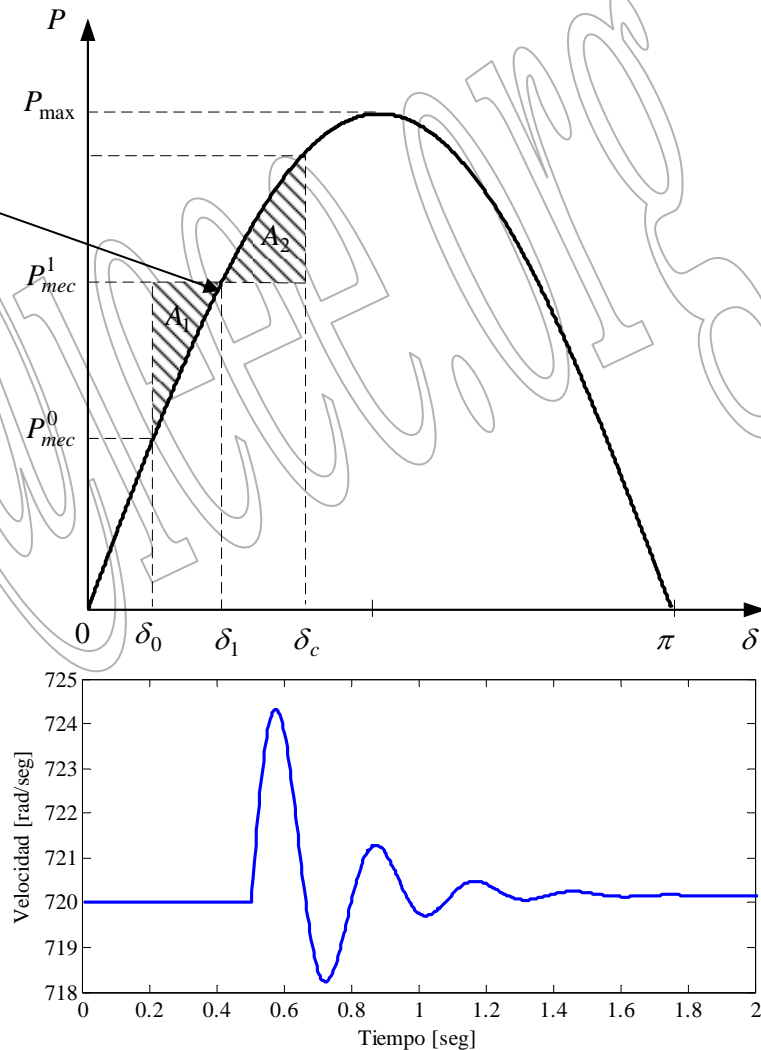


# CAI Aplicación Ilustrativa

- En el punto "b" de la grafica corresponde donde la máquina termina de acelerar pero su velocidad rotorica es aun mayor que la velocidad de sincronismo:

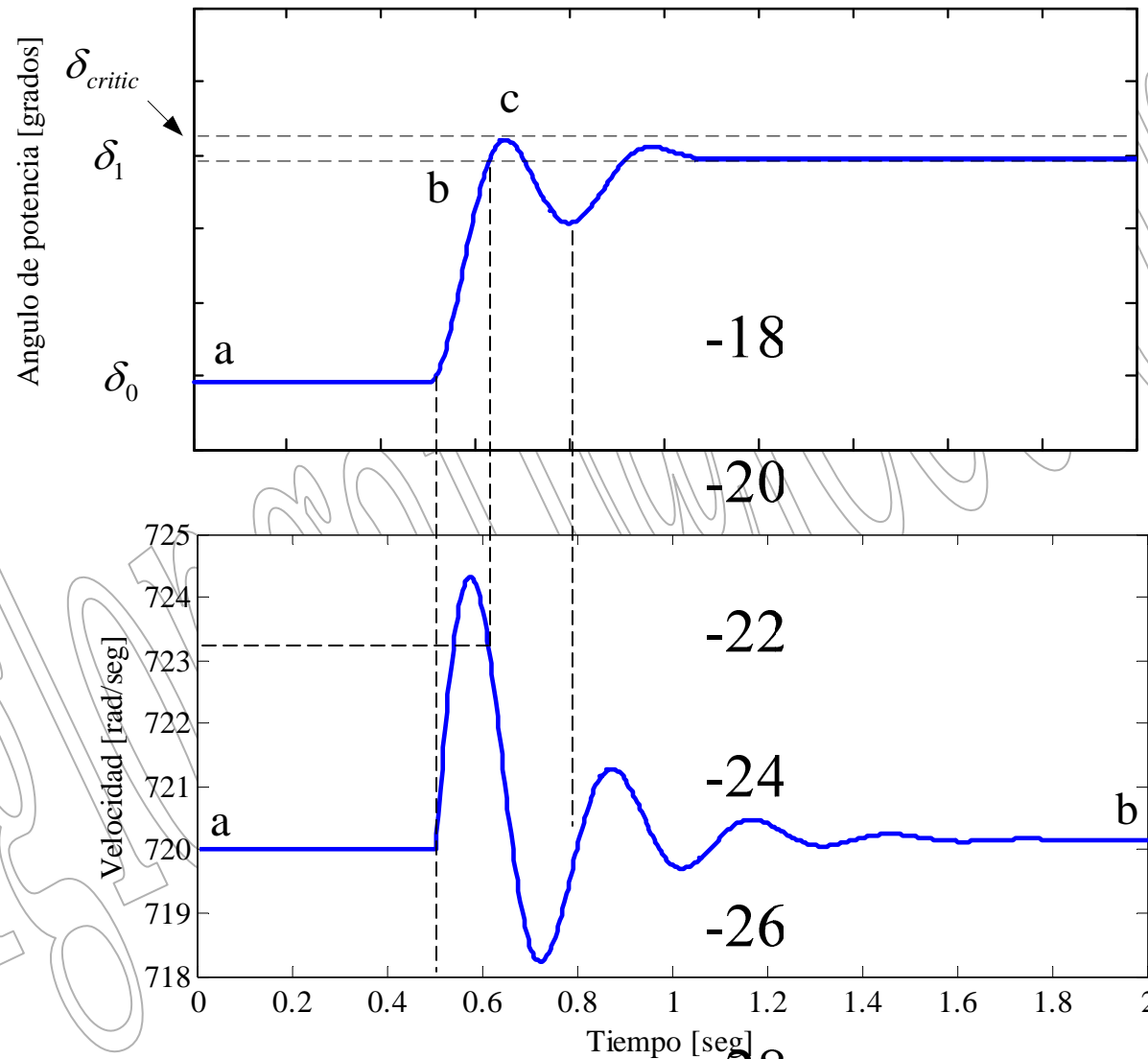
$$\omega(t) \geq \omega_s$$

- Por lo que el ángulo de potencia continua aumentando



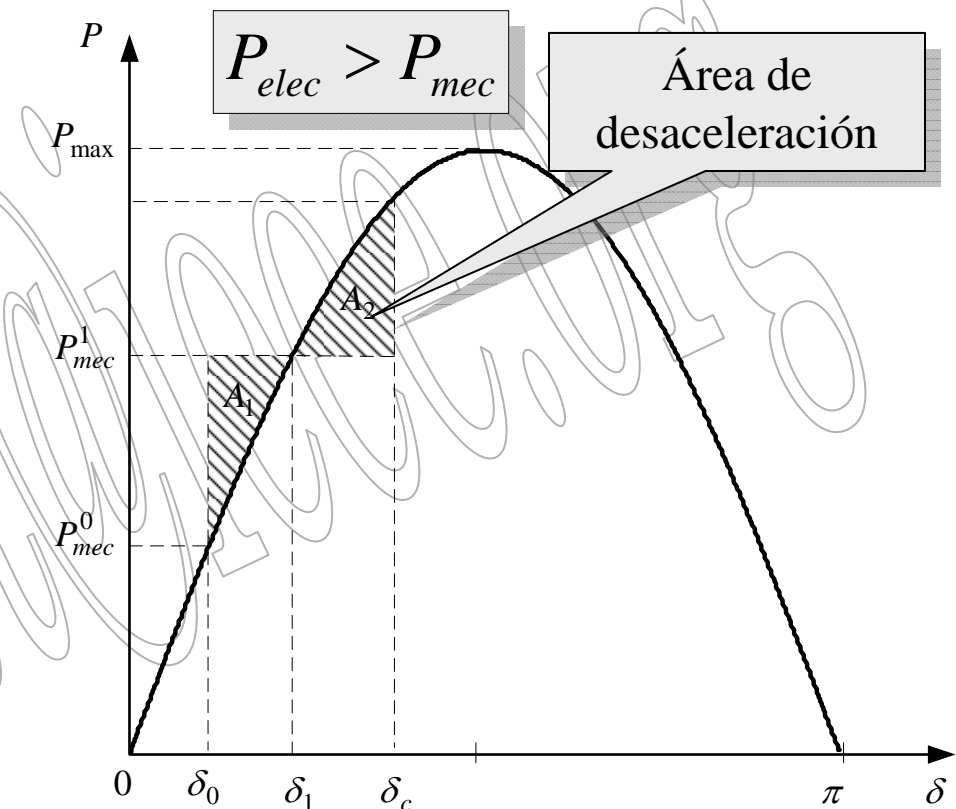


# CAI Aplicación Ilustrativa



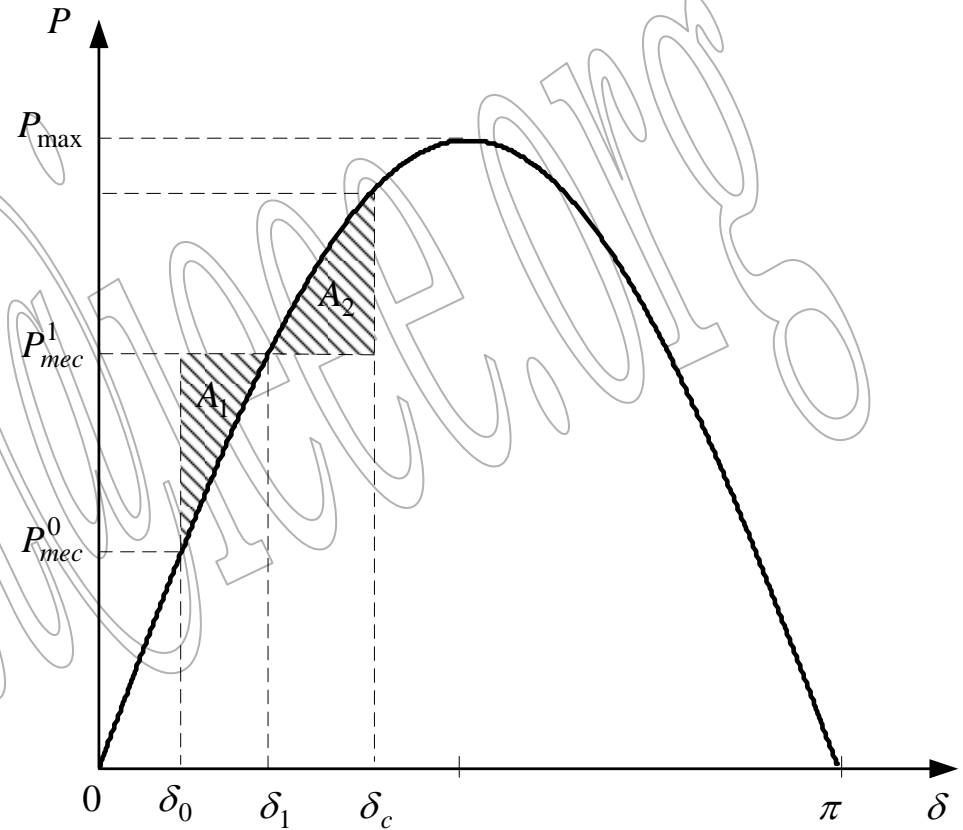
# CAI Aplicación Ilustrativa

- En el espacio comprendido entre el punto "b" y "c" la velocidad rotórica permanece por encima de la de sincronismo, la potencia eléctrica es mayor que la potencia mecánica, por lo que se hace presenta una *potencia desacelerante*, que es entregada por la energía cinética almacenada en el rotor, perdiendo velocidad el rotor, pero el ángulo de potencia continúa aumentando
- La zona marcada por "A<sub>2</sub>", denota *la potencia de desaceleración*



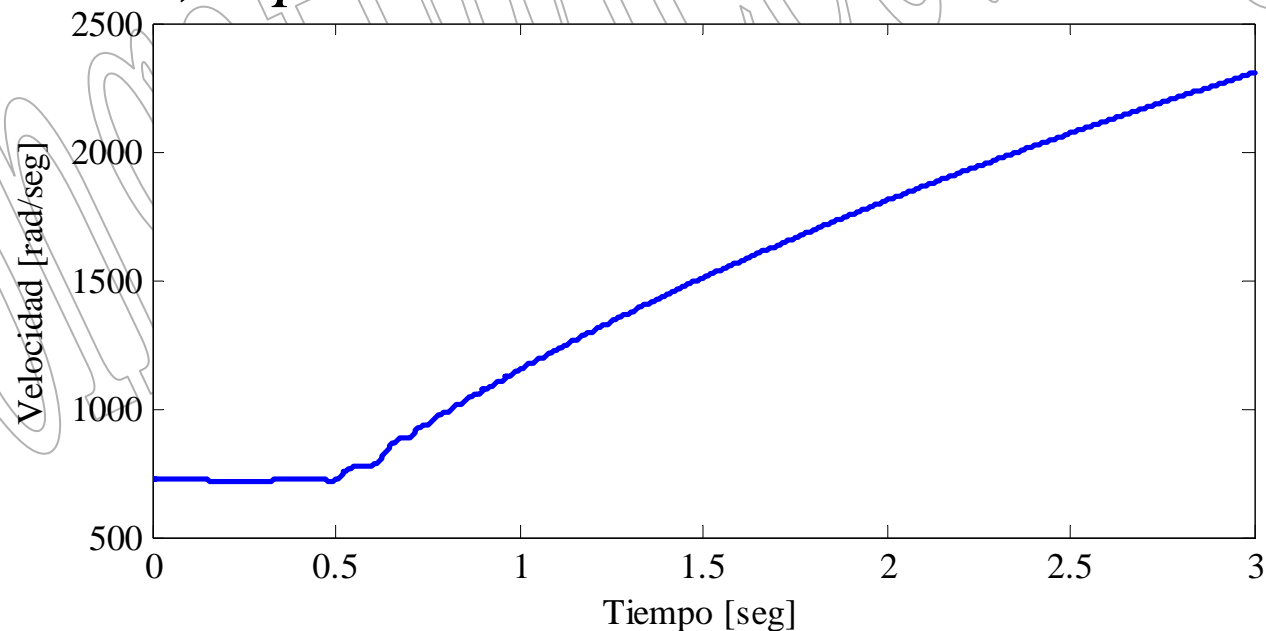
# CAI Aplicación Ilustrativa

- Se predice que en este proceso habrá estabilidad alrededor del punto "b" con el nuevo ángulo de potencia  $\delta_1$  si el área de desaceleración es igual al área de aceleración ( $A_1 = A_2$ ).



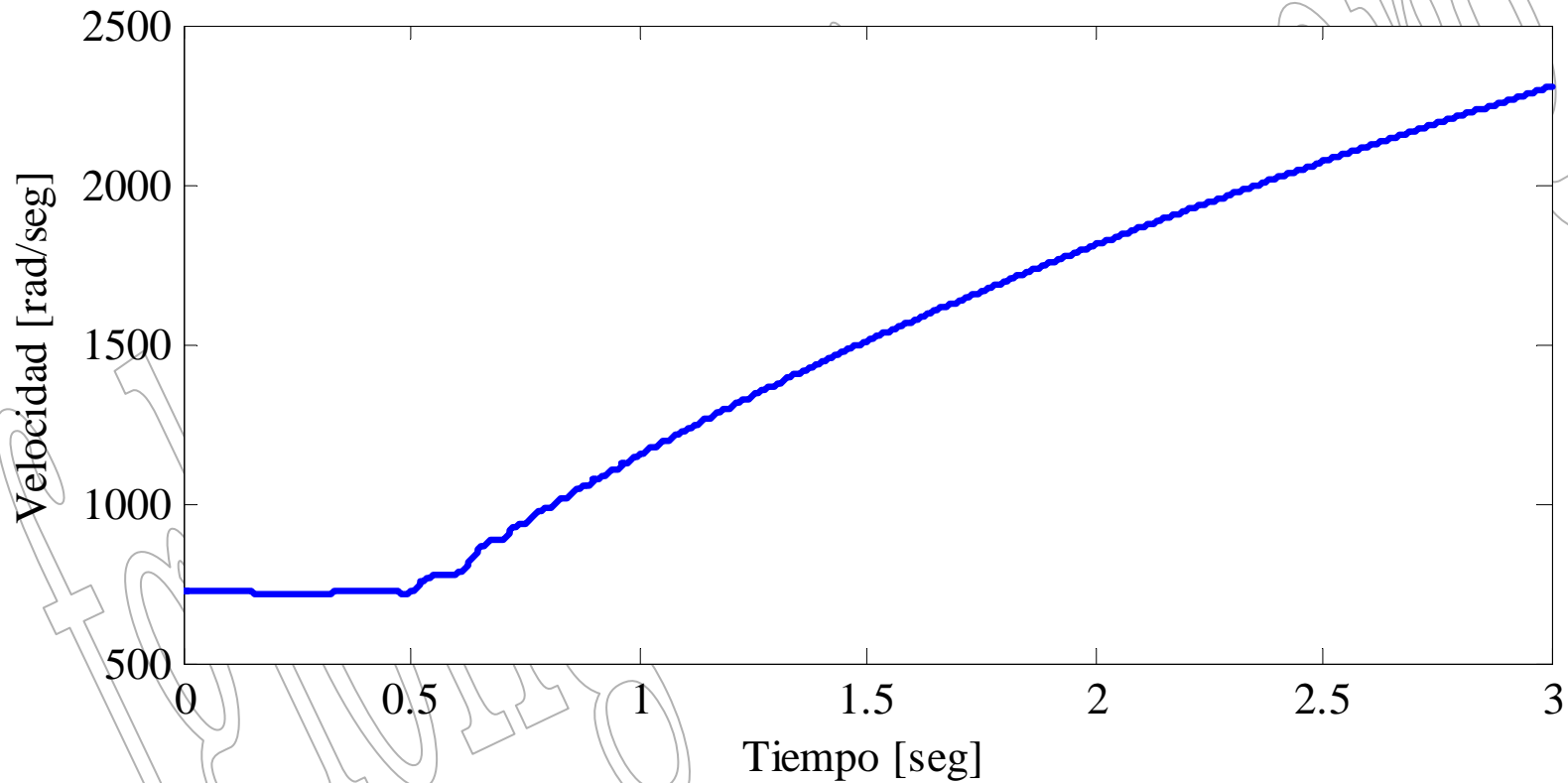
# CAI Aplicación Ilustrativa

- Es importante mencionar que si durante el proceso de oscilación el rotor no puede entregar toda la energía cinética almacenada en él, su velocidad rotórica nunca disminuirá y el ángulo de potencia aumentará indefinidamente, *perdiendo el sincronismo la máquina.*

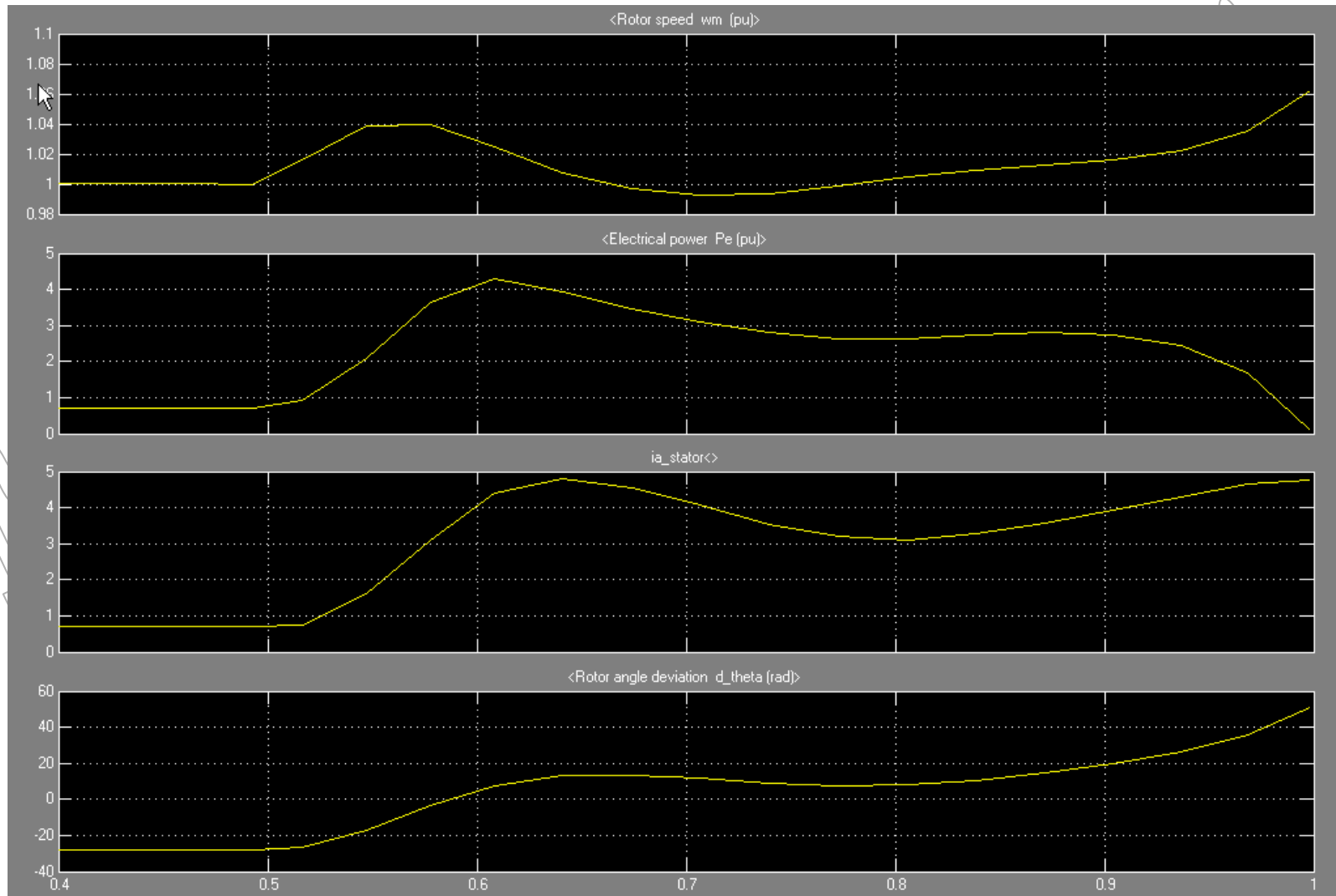


# CAI Aplicación Ilustrativa

---



# CAI Aplicación Ilustrativa



# CAI Aplicación Ilustrativa

---

- Es necesario que *el área de desaceleración debe ser igual al área de aceleración.*
- El ángulo de potencia que determina la mayor área de aceleración sin que la máquina pierda el sincronismo, es el llamado *ángulo crítico*  $\delta_{critic}$ .
- El tiempo que corresponde para alcanzar el ángulo crítico se le denomina *tiempo crítico*  $t_{critic}$ .

# CAI Aplicación Ilustrativa

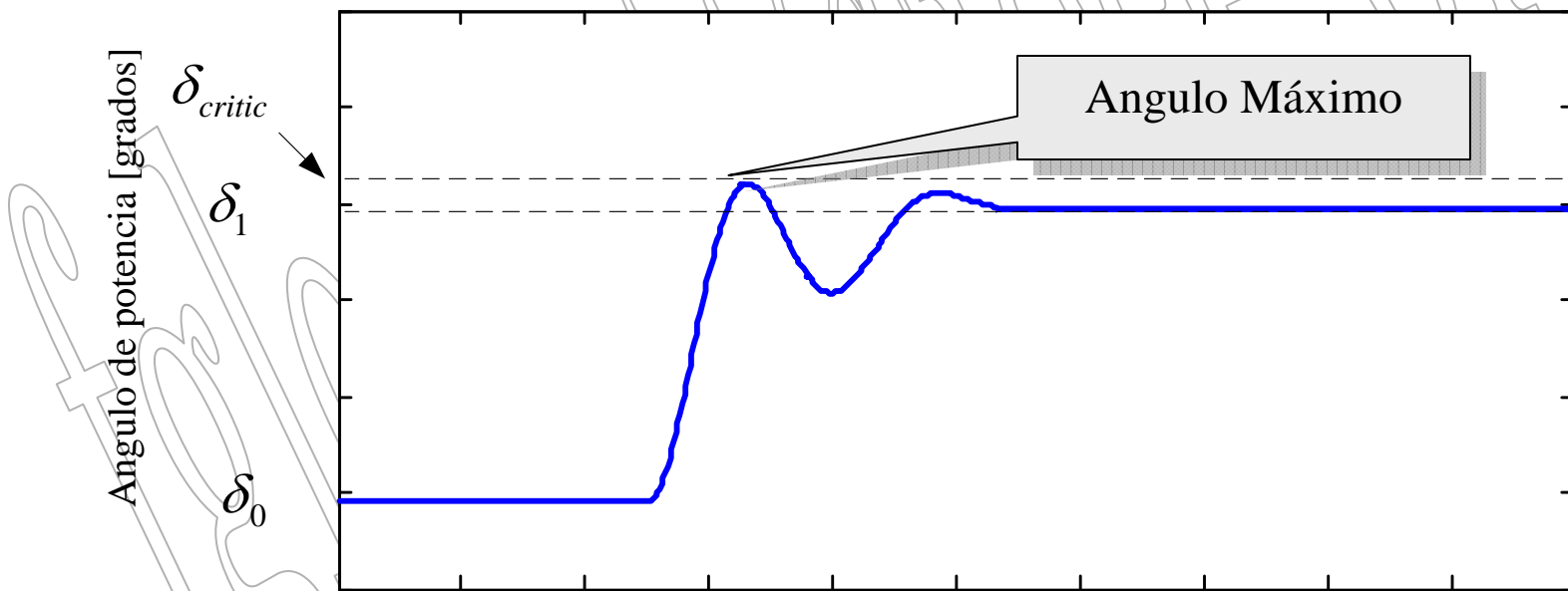
---

- El *tiempo critico* se define como el tiempo máximo entre el inicio y el despeje de una falla, de manera que el sistema sea transitoriamente estable.



# CAI Aplicación Ilustrativa

- El ángulo de oscilación máxima  $\delta_{max}$ , se satisface cuando el ángulo de potencia del rotor alcanza máximo y  $d\delta(t)/dt = 0$



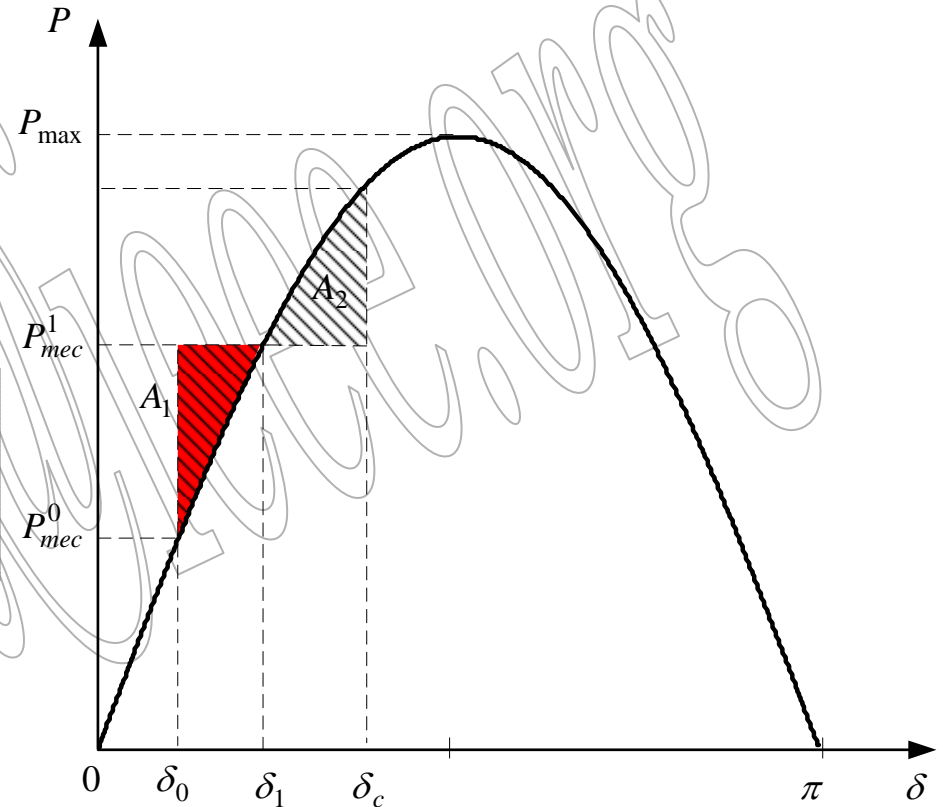
-18

-20

# CAI Aplicación Ilustrativa

- Geométricamente se puede estimar el *área acelerante* " $A_1$ " a través de la expresión:

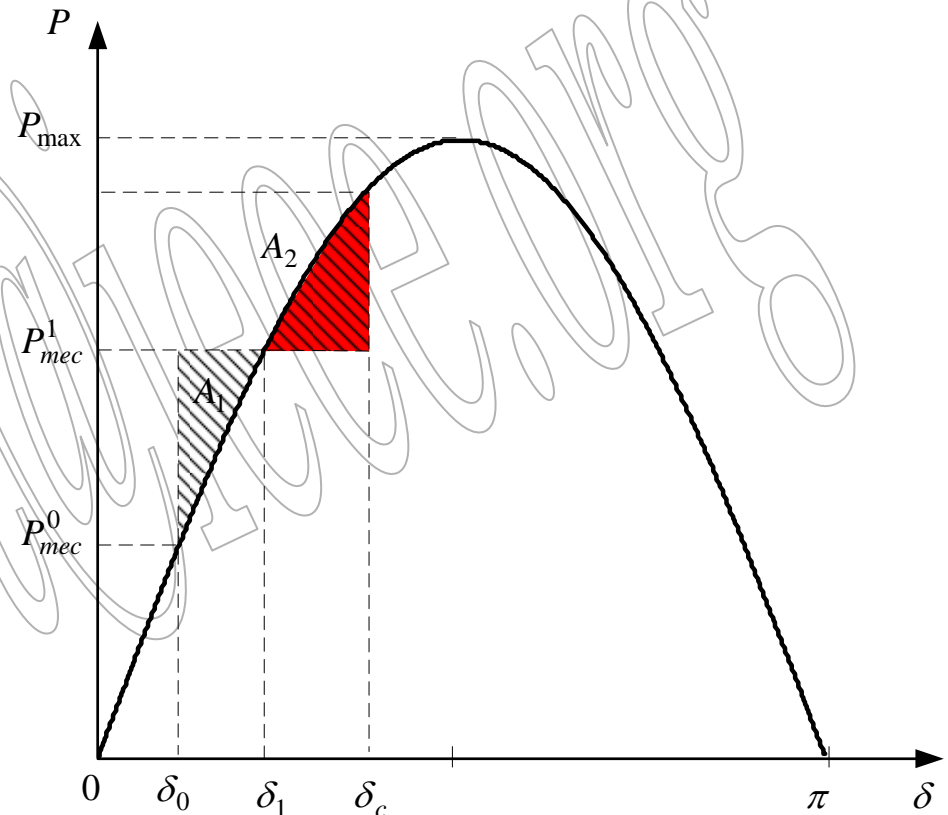
$$A_1 = \int_{\delta_0}^{\delta_1} (P_{mec} - P_{elec}) d\delta$$



# CAI Aplicación Ilustrativa

- El área de la zona *desacelerante* "A<sub>2</sub>" puede ser escrita por:

$$A_2 = \int_{\delta_1}^{\delta_{\max}} (P_{elec} - P_{mec}) d\delta$$



# CAI Aplicación Ilustrativa

---

- Restando ambas zonas " $A_1 - A_2$ " se obtiene:

$$A_1 - A_2 = \int_{\delta_0}^{\delta_1} (P_{mec} - P_{elec}) d\delta - \int_{\delta_1}^{\delta_{max}} (P_{elec} - P_{mec}) d\delta$$

$$A_1 - A_2 = \int_{\delta_0}^{\delta_{max}} (P_{mec} - P_{elec}) d\delta$$

# CAI Aplicación Ilustrativa

---

$$A_1 - A_2 = \int_{\delta_0}^{\delta_{\max}} (P_{mec} - P_{elec}) d\delta$$

- La ecuación anterior se satisface que  $d\delta(t)/dt = 0$ , cuando las *áreas acelerante* y *desacelerante* son iguales  $A_1 = A_2$
- Comprender el fenómeno de la máquina, demuestra que la energía ganada cuando el rotor se acelera y el ángulo  $\delta(t)$  crece hasta  $\delta_1$  se pierde cuando el rotor se frena cuando alcanza el valor  $\delta_{\max}$ .

# CAI Aplicación Ilustrativa

---

- La potencia acelerante de la máquina al ser perturbada se demostró que se puede escribir como:

$$\frac{d^2\delta(t)}{dt^2} = \frac{P_{acel}}{M}$$

$$P_{acel} = M \frac{d^2\delta(t)}{dt^2}$$

# CAI Aplicación Ilustrativa

---

- Considerando que la velocidad angular del rotor es cero en el momento de comenzar la perturbación, pero después de " $t$ " segundos esta velocidad es :

$$\frac{d\delta(t)}{dt} = \int_0^t \frac{P_{acel}}{M} dt = \frac{P_{acel}}{M} t$$

- Resultando que el desplazamiento angular rotorico en ese tiempo es:

$$\delta(t) = \delta_0 + \int_0^t \frac{P_{acel}}{M} t dt = \frac{P_{acel}}{2M} t^2 + \delta_0$$

# CAI Aplicación Ilustrativa

---

- El ángulo crítico corresponde al tiempo crítico:

$$\delta_c = \delta_0 + \frac{P_{acel}}{2M} t_c^2$$

- Se tiene el tiempo crítico finalmente:

$$t_c = \sqrt{\frac{2M(\delta_c - \delta)}{P_{acel}}}$$



# Limite de Estabilidad Transitoria

---

- El *límite de estabilidad transitoria* se refiere al valor de *potencia que puede ser transmitida con estabilidad cuando el sistema es sujeto a un perturbación aperiódica (aperiodic disturbance)*.
- Por perturbación aperiódica significa una que *no se produce con regularidad* y solo después de intervalos tales que el sistema alcanza una condición de equilibrio entre perturbaciones.

# Limite de Estabilidad Transitoria

---

- Los tres principales tipos de perturbaciones o disturbios transitorios que reciben consideración en los estudios de estabilidad, en orden de incremento de importancia son:
  1. Incrementos de Carga
  2. Operaciones de maniobra (*Switching Operations*)
  3. Fallas con subsecuentes aislamiento de circuitos (*circuit isolation*)