

Entendiendo la Transformación de Park

Francisco M. Gonzalez-Longatt, Miembro IEEE

Resumen— La representación modal de un sistema es obtenido por la diagonalización de la representación del espacio de estado, esto se puede lograr por medio de una transformación similar particular especificada por los autovectores de la matriz de transición. En los sistemas de potencia esta representación modal logra el desacople de las ecuaciones. Clark, Park, Fortescue, han presentado matrices de transformación donde se efectúan un tipo de cambio coordinado. Park, lo efectúa indistintamente entre sistemas coordinados estáticos y giratorio. En este artículo se presenta la transformación de Park en dos etapas y se muestra su significado por medio de simulación para un sistema trifásico.

Palabras claves— Matrices, transformación de Park, sistema de referencia giratorio y estático, transformación similar.

I. INTRODUCCIÓN

Los sistemas de potencia han sido tradicionalmente analizados usando matrices de transformación (Clark, Fortescue, Park, etc.) [1], [2]. Los métodos de representación modal desacoplan las ecuaciones simétricas de los sistemas de potencia. Estas técnicas han sido ampliamente usadas para modelar sistemas eléctricos en régimen permanente bajo operación balanceada y desbalanceada y analizar transitorios, la dinámica y los armónicos.

La transformación de componentes simétricas desacopla sistemas simétricos y polifásicos cíclicos. Sistemas simétricos como líneas de transmisión idealmente transpuestas, transformadores y cargas pueden ser desacoplados por alguna transformación modal, pero la principal ventajas de la transformación de componentes simétricas es el desacople de sistemas cíclicos como motores de inducción y maquinas sincrónicas de rotor cilíndrico. Para y otras transformaciones rotacionales son empleadas para simplificar el modelo de la maquina sincrónica de rotor de polos salientes. En este artículo se presenta la definición de la transformación similar, y se detalla la transformación de Park en dos etapas, que mediante simulación son contrastadas.

Manuscrito elaborado el 9 de Junio de 2004.

F. M. G. L. está con la Universidad Nacional Experimental Politécnica de la Fuerza Armada Nacional, Carretera Nacional Maracay-Mariara Frente a Base Aérea Mariscal Sucre, Núcleo Maracay, Departamento de Ingeniería Eléctrica, Maracay, Estado Aragua, Venezuela, Tlf. +58-243-5546954, Fax: +58-244-5546923, E-mail: flongatt@ieee.org. Actualmente culminando su doctorado en la Universidad Central de Venezuela, Caracas, Venezuela, Tlf. +58-414-4532014, E-mail: flongatt@elecisc.ing.ucv.ve

II. TRANSFORMACIÓN SIMILAR

A. Definición de Transformación Similar

Dos matrices A y B , $n \times n$ son similares si existe una matriz $n \times n$ no singular, P , tal que:

$$B = P^{-1}AP$$

La función antes definida que lleva la matriz B en la matriz A se llama transformación semejante. Se puede escribir esta transformación lineal como:

$$T(A) = P^{-1}AP$$

La matriz de transformación P se obtenida escribiendo los n vectores propios de A en forma de columna.

B. Aplicación a Sistemas de Potencia

Suponga que se tiene una matriz A de la forma:

$$A = \begin{bmatrix} Z & M & M \\ M & Z & M \\ M & M & Z \end{bmatrix}$$

La matriz de transformación de A , queda definida por los tres vectores propios de A escritos en forma de columna.

Para obtener los valores propios, se determina el polinomio característico, resolviendo:

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

Que en este caso resulta de orden tres:

$$(\lambda - \alpha_1)(\lambda - \alpha_2)(\lambda - \alpha_3) = 0$$

Siendo los autovalores:

$$\lambda_1 = Z + 2M$$

$$\lambda_2 = Z - M$$

$$\lambda_3 = Z - M$$

Los autovectores x_1, x_2, x_3 , se obtienen de resolver:

$$(A - \lambda_i I)x_i = 0$$

resultando:

$$x_1 = \begin{bmatrix} k_0 \\ k_0 \\ k_0 \end{bmatrix} \quad x_2 = \begin{bmatrix} -(k_1 + k_2) \\ k_1 \\ k_2 \end{bmatrix} \quad x_3 = \begin{bmatrix} -(k_3 + k_4) \\ k_3 \\ k_4 \end{bmatrix}$$

La matriz de transformación queda dado por:

$$P = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ k_0 & -(k_1 + k_2) & -(k_3 + k_4) \\ k_0 & k_1 & k_3 \\ k_0 & k_2 & k_4 \end{bmatrix}$$

Nótese que la P , depende ahora de los valores de k_0, k_1, k_2, k_3, k_4 .

1) Transformación de Fortescue

Si se considera que los autovectores poseen las siguientes componentes complejas:

$$k_0 = 1 \quad k_1 = k_4 = a = e^{j\frac{2\pi}{3}} \quad k_2 = k_3 = a^2 = e^{-j\frac{2\pi}{3}}$$

Con lo que la matriz de transformación resulta en la conocida matriz compleja de componentes simétricas de Fortescue.

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & a^2 \\ 1 & a^2 & a \end{bmatrix}$$

Nótese que los autovectores, x_1, x_2, x_3 , corresponden a la representación de vectores unitarios de secuencia cero, positiva y negativa respectivamente

2) Transformación de Park

Las componentes de cada autovector se consideran reales y dados por:

$$k_0 = 1$$

$$k_1 = \cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2} \quad k_3 = \text{sen}\left(-\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$k_2 = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2} \quad k_4 = \text{sen}\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

En este caso matriz de transformación, P , se conoce como transformación de Park, muy empleado en el estudio de las maquinas eléctricas teniendo un especial sentido cada uno de los autovectores.

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 1 & -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}$$

En la siguiente sección de explica con mas detalle esta transformación.

III. TRANSFORMACIÓN DE PARK

En el año 1929 por R. H. Park presento un articulo a la AIEE titulado "Two reactions theory of synchronoud machines." En éste, se presentó una generalización y extensión del trabajo de Blondel, Dreyfus, y Doherty y Nickle, y establece métodos generales para calcular corriente, potencia, y torque en maquinas sincrónicas de polos saliente y de rotor liso tanto en condiciones de estado estacionario como transitorio.

Park, resulta una transformación similar y como tal es un cambio de coordenadas, desde el un sistema trifásico estacionario ($f_{ab} = [f_a f_b f_c]^T$) al sistema coordenado giratorio sobre los ejes $dq0$ ($f_{0dq} = [f_0 f_d f_q]^T$) que define Blondel. Esta transformación es hecha en dos pasos:

- Una transformación desde el sistema coordenado estacionario trifásico (abc) a un sistema coordenado estacionario denominado $\alpha\beta$.

$$f_{\alpha\beta} = P(0)f_{abc}$$

Donde la matriz de transformación $P(0)$ viene dado por:

$$P(0) = \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 1 & -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}$$

$f_{\alpha\beta}$ contiene tres componentes, f_α, f_β y f_0 y representa la descomposición de cada una de las componente del f_{abc} en sobre los ejes $\alpha\beta$.

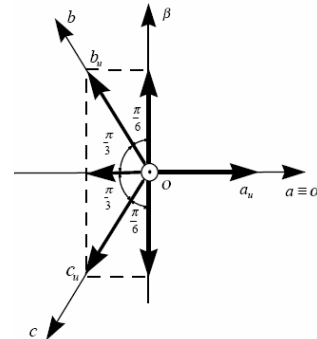


Fig. 1. Transformación del eje coordenado abc al $\alpha\beta$

- Una transformación desde el sistema coordenado estacionario $\alpha\beta$ al sistema giratorio $dq0$.

$$f_{0dq} = R(\theta_r)f_{\alpha\beta}$$

Siendo $R(\theta_r)$, la matriz que permite la transformación al eje giratorio.

$$R(\theta_r) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta_r) & -\text{sen}(\theta_r) \\ 0 & \text{sen}(\theta_r) & \cos(\theta_r) \end{bmatrix}$$

$$\text{Donde } \theta_r = \omega_r t + \frac{\pi}{2} + \delta$$

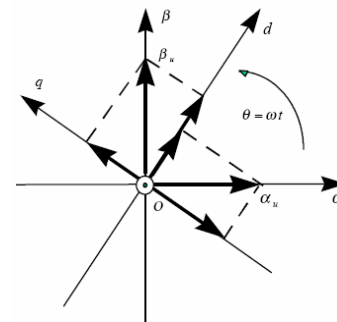


Fig. 2. Transformación del eje coordenado $\alpha\beta$ al $dq0$ Combinando en un solo paso:

$$P(\theta_r) = R(\theta_r)P(0)$$

Se tiene:

$$f_{0dq} = P(\theta_r)f_{abc}$$

$$\begin{bmatrix} f_0 \\ f_d \\ f_q \end{bmatrix} = \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \cos(\theta_r) & \cos\left(\theta_r - \frac{2\pi}{3}\right) & \cos\left(\theta_r + \frac{2\pi}{3}\right) \\ \text{sen}(\theta_r) & \text{sen}\left(\theta_r - \frac{2\pi}{3}\right) & \text{sen}\left(\theta_r + \frac{2\pi}{3}\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_a \\ f_b \\ f_c \end{bmatrix}$$

Donde:

$$P(\theta_r) = \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \cos(\theta_r) & \cos\left(\theta_r - \frac{2\pi}{3}\right) & \cos\left(\theta_r + \frac{2\pi}{3}\right) \\ \text{sen}(\theta_r) & \text{sen}\left(\theta_r - \frac{2\pi}{3}\right) & \text{sen}\left(\theta_r + \frac{2\pi}{3}\right) \end{bmatrix}$$

La inversa de la matriz de transformación de Park:

$$[P(\theta_r)]^{-1} = [P(\theta_r)]^T$$

$$P(\theta_r) = \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \cos(\theta_r) & \text{sen}(\theta_r) \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \cos\left(\theta_r - \frac{2\pi}{3}\right) & \text{sen}\left(\theta_r - \frac{2\pi}{3}\right) \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \cos\left(\theta_r + \frac{2\pi}{3}\right) & \text{sen}\left(\theta_r + \frac{2\pi}{3}\right) \end{bmatrix}$$

IV. SIMULACIÓN

En la Figura 3 se muestra un sistema de voltajes simétricos balanceados de 3300 Voltios RMS línea a línea, a 60 Hz.

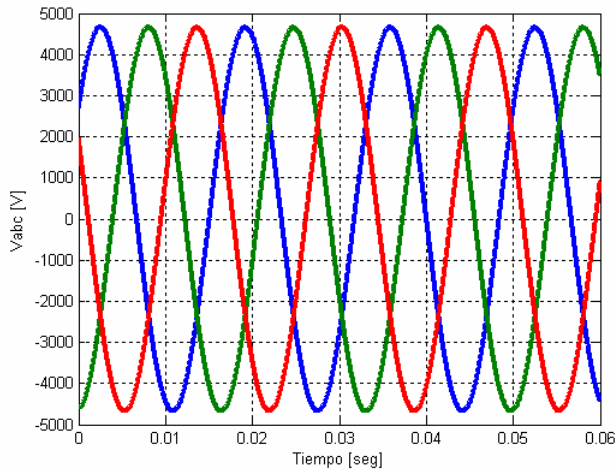


Fig. 3. Voltajes simétricos balanceados

En la Figura 4 se muestran los voltajes de la Figura 3 transformados a un eje de referencia estacionario y en la Figura 5 son transformados al eje giratorio.

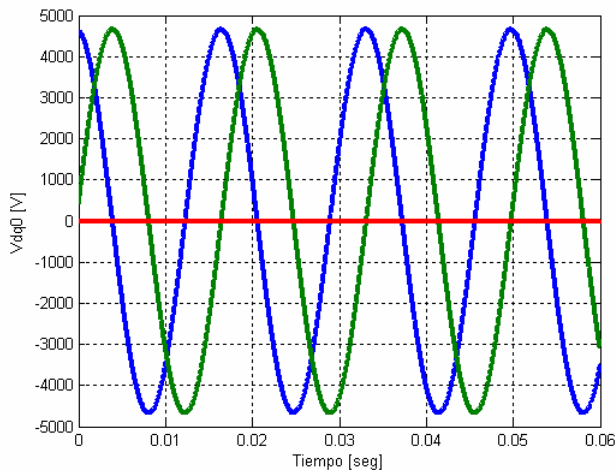


Fig. 5. Voltajes transformados al sistema coordenado estático

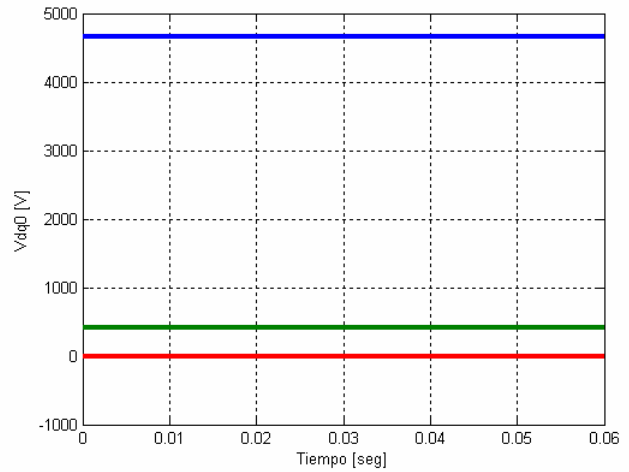


Fig. 5. Voltajes simétricos balanceados en el eje de referencia giratorio.

El sistema de referencia estacionario debe producir dos voltajes desplazados 90 grados y en el eje giratorio debe producir voltajes DC. Esto es lo que se muestra en forma exacta en las Figuras 4 y 5.

Ahora los voltajes son desbalanceados, en la Fig. 6 se muestra una de los voltajes de fase que ha sido aumentado un 20%

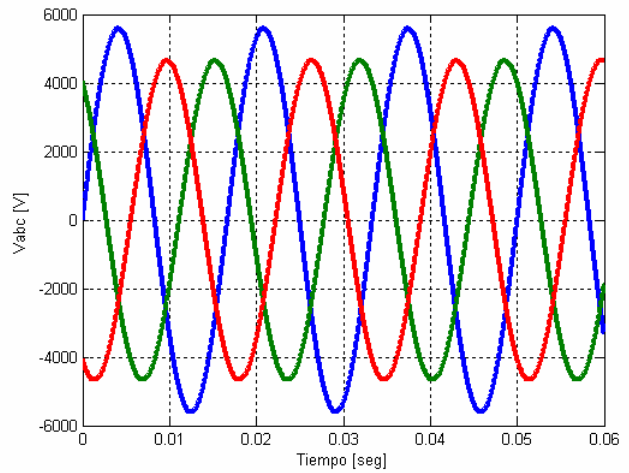


Fig. 6. Voltajes desbalanceados

En la Fig. 7 los voltajes la Fig. 6 son transformados al eje de referencia estacionario y en la Fig. 8. estos voltajes son transformados al eje giratorio.

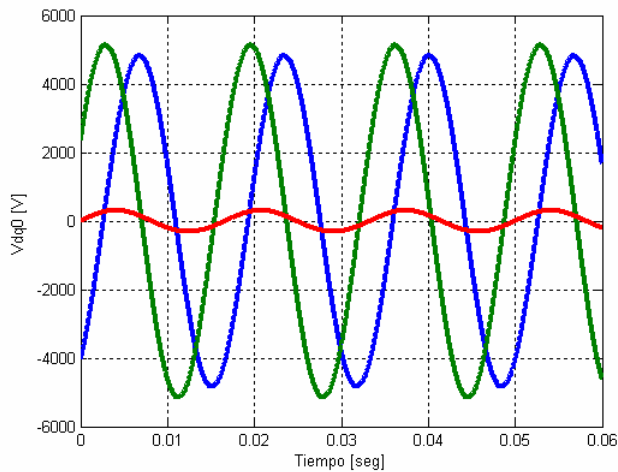


Fig. 7. Voltajes transformados al sistema coordenado estático

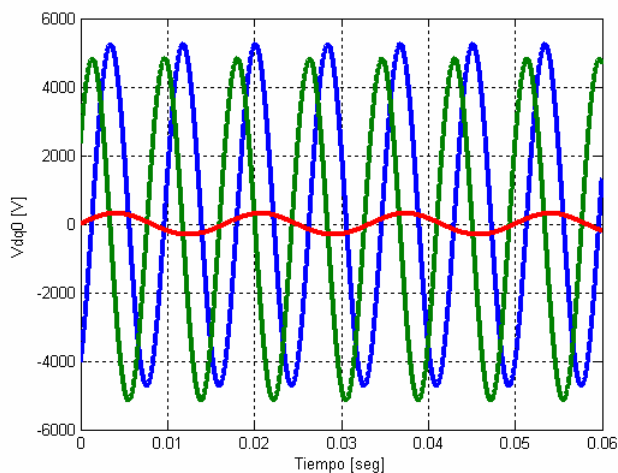


Fig. 7. Voltajes simétricos balanceados en el eje de referencia giratorio.

Como se ha mostrado, el resultado es diferente que el caso balanceado. Se debe hacer notar la presencia de un voltaje cero, el cual es el mismo para las dos transformaciones. Se debe notar también que existe una componente de frecuencia en todos los voltajes y la frecuencia de la secuencia cero es diferente de las otras frecuencias.

V.CONCLUSIONES

En este artículo se ha presentado una simple visión de la transformación similar que da origen a las tradicionalmente empleadas matrices de transformación empleadas en el análisis de sistemas de potencia (Clark, Fortecue, Park). Todas son transformaciones modales. Estas transformaciones polifásicas desacoplan sistemas simétricos y polifásicos cíclicos. Este desacople modal puede ser muy duro en redes polifásicas.

La transformación resulta un cambio de coordenadas, ya sea de un sistema de coordenadas estático a giratorio o viceversa. En este articulo se presentó es esquema de dos pasos: transformación desde el sistema coordenado estacionario a un sistema coordenado estacionario para luego pasar de éste al sistema giratorio. Mediante simulación de ha demostrado la efectividad de esta transformación

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] R. H. Park, "Two-reaction theory of synchronous machines," *AIEE Transactions*, vol. 48, 1929, p.716.
- [2] E. Clarke, "Circuit Analysis of AC Power Systems". New York: Wiley, 1950, vol. I.
- [3]
- [4] Mihailovic, Zoran. "Modeling and control design of VSI fed PMSM drive system with active load". Master Thesis, 1998. Disponible en: <http://scholar.lib.vt.edu/theses/available/etd-031899-212402/>
- [5] P. Kundur, "Power System Stability and Control". New York: EPRI Power System Engineering Series, McGraw-Hill, Inc., 1994.
- [6] J. J. Grainger and W. D. Stevenson, "Power System Analysis". New York: McGraw-Hill, Inc., 1994.
- [7] C. L. Fortescue, "Method of Symmetrical Coordinates Applied to the Solution of Polyphase Networks," *Trans. AIEE*, pt. II, vol. 37, pp. 1027–1140, 1918.
- [8] P. M. Weedy, "Electric Power Systems". New York: JohnWiley & Sons, 1990.