Reporte de Investigación
2007-07

Optimización y la Programación Lineal: Una Introducción

Responsables: Marchena Williams
Ornelas Carlos

Supervisor: Francisco M. González-Longatt

Línea de Investigación:
Fuentes Alternas de Energía
Y
Generación Distribuida

Iniciativa para la Investigacion y Desarrollo de la Energía Eolica

19-Feb-2007

Generalidades

El presente reporte de investigación presenta los fundamentos teóricos relacionados con el problema optimización desde un punto de vista práctico, donde se indica la formulación del problema matemático y se muestra en forma general las técnicas de resolución: aplicación de métodos de programación lineal, programación no lineal, programación cuadrática y la programación entera-mixta se aprecia su solución.

El interés de este reporte es contribuir en el conocimiento, presentando un compendio básico teórico del problema de optimización, pero además debido a un interés particular de investigación, se focalizará la orientación hacia la técnica de optimización por *programación lineal*, a través de la maximización de una función objetivo, la cual está sujeta a restricciones lineales y aproximadamente lineales por lo que se ahondara en tal tema en específico.

Optimización

El objetivo de la optimización global es encontrar la mejor solución de modelos de decisiones difíciles frente a las múltiples soluciones locales [7].

Las técnicas de optimización son empleadas para encontrar un juego de parámetros de diseño $\mathbf{x} = [x_1, x_2, \ldots, x_n]$, que puede de algún modo ser definido como óptimo. En un caso simple esto podría ser la minimización o la maximización de alguna característica de sistema que es dependiente de x. En una formulación más avanzada la función objetivo, $f(\mathbf{x})$ es minimizada o maximizada, estando sujeta a *restricciones de igualdad* $G_i(\mathbf{x}) = 0$ ($i = 1,\ldots, m_e$); *restricciones de desigualdad* $G_i(\mathbf{x}) \leq 0$ ($i = m_e + 1, \ldots, m_e$); y/o límites de parámetro X_l, X_u [4].

El problema general de optimización es el siguiente:

$$\underset{\mathbf{x}}{Min}\left[f(\mathbf{x})\right] \tag{1}$$

Respecto a:

$$\begin{aligned} G_i(x) &= 0, \qquad i = 1,\ldots,m_e \\ G_i(x) &\leq 0, \qquad i = m_e + 1,\ldots,m \end{aligned} \tag{2}$$

Donde $\mathbf{x}$ es el *vector de parámetros de diseño* de n longitud, la $f(x)$ es la *función objetivo*, que devuelve un valor escalar, y la función de vector $G(x)$ devuelve un vector de longitud m que contiene los *valores de igualdad y restricciones de desigualdad* evaluadas en x.

Una solución eficiente y exacta con este problema depende no sólo del tamaño del problema en términos del número de restricciones y variables de diseño sino también de las características de la función objetivo y sus restricciones. Cuando la función objetivo y las restricciones son funciones lineales de la variable de diseño, el problema se conoce como *Programación Lineal* (PL). [4]

Existen diversas técnicas de optimización entre las cuales contiene mencionar las sumariadas en la Tabla 1 [10].

Tabla 1. Clasificación General de las Técnicas de Optimización

Técnicas de Programación Matemática	*Técnicas de procesos Estocásticos*	*Métodos Estadísticos*
Métodos de calculo Cálculos de variaciones Programación no lineal Programación geométrica Programación cuadrática Programación lineal Programación dinámica Programación de variables enteras. Programación estocástica Programación Separable Programación de funciones multiobjetivo Métodos de redes: PERT y CPM Teoría de juegos *Simulated annealing* Algoritmos genéticos Redes neuronales	Teoría de decisión estadística Procesos de Markov *Queueling theory* Teoría renovable Métodos de simulación Teoría de fiabilidad	Análisis de regresión Cluster análisis, pattern recognition Experimentos de diseño Análisis Discriminante

Como ya se mencionó anteriormente, se es interés fundamental de investigación tratar específicamente la *programación matemática*.

Ésta en general, aborda el problema de determinar asignaciones óptimas de recursos limitados para cumplir un objetivo dado. Cuando se trata de resolver un problema de este tipo, la primera etapa consiste en identificar las posibles decisiones que pueden tomarse; esto lleva a identificar las variables del problema concreto. Las variables son de carácter cuantitativo y se buscan los valores que optimizan el objetivo. La segunda etapa supone determinar que decisiones resultan admisibles; esto conduce a un conjunto de restricciones que se determinan teniendo presente la naturaleza del problema en cuestión ya sea programación lineal, lineal entera (binaria o mixta), no lineal o cuadrática. En la tercera etapa, se calcula el coste/beneficio asociado a cada decisión admisible; esto supone determinar una función objetivo que asigna, a cada conjunto posible de valores para las variables que determinan una decisión, un valor de coste/beneficio. El conjunto de todos estos elementos define el problema de *Optimización* [7].

En cuanto a la dificultad en este proceso de optimización se encuentra en los casos en que se trata con *Programación No lineal* (PN), donde el problema de éstos radica en que tanto la función objetivo y restricciones pueden ser funciones no lineales de las variables de diseño. Una solución del problema de programación no lineal generalmente requiere que un procedimiento iterativo establezca una dirección de búsqueda en cada iteración principal. Esto por lo general es alcanzado mediante la solución de un problema lineal, cuadrático, o un subproblema libre [4].

La optimización, también denominada programación matemática, sirve para encontrar la respuesta que proporciona el mejor resultado, la que logra mayores ganancias, mayor producción, o la que logra el menor costo. Con frecuencia, estos problemas implican utilizar de la manera más eficiente los recursos, tales como dinero, tiempo, maquinaria, personal, existencias, etc. Los problemas de optimización generalmente se clasifican en lineales y no lineales, según las relaciones del problema sean lineales con respecto a las variables. Existe una serie de paquetes de software para resolver problemas de optimización. Por ejemplo, LINDO (http://www.lindo.com/) o WinQSB resuelven modelos de programas lineales y LINGO, What'sBest! y MATLAB™ resuelven problemas lineales y no lineales [7].

Programación Lineal

La *programación lineal* resuelve problemas donde todas las relaciones entre las variables son lineales, tanto en las restricciones como en la función objetivo [2], la presencia de una única función no lineal hace que el problema no pueda clasificarse como problema de programación lineal [1]; ésta evidencia su aplicación en diversos campos, como la ingeniería, la economía, la gestión, y muchas otras áreas de la ciencia, la técnica y la industria [1].

El objeto de la programación lineal es optimizar (*minimizar o maximizar*) una función lineal de n variables sujeto a restricciones lineales de igualdad o desigualdad, denominada *función objetivo*.

Un problema de programación lineal consiste en encontrar el óptimo (máximo o mínimo) de una función lineal en un conjunto que puede expresarse como la intersección de un número finito de hiperplanos y semiespacios en IR^n. Cualquier problema de programación lineal requiere identificar cuatro componentes básicos [1]:

1. El conjunto de datos.
2. El conjunto de variables involucradas en el problema, junto con sus dominios respectivos de definición.
3. El conjunto de restricciones lineales del problema que definen el conjunto de soluciones admisibles.
4. La función lineal que debe ser optimizada (minimizada o maximizada).

La forma más general de un problema de programación lineal cosiste en minimizar o maximizar una función objetivo [1]:

$$Z = f(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \tag{3}$$

Sujeto a las siguientes restricciones:

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_j, i = 1,2,\ldots, p-1 \\
&\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geq b_j, i = p,\ldots, q-1 \\
&\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_j, i = q,\ldots, m
\end{aligned} \tag{4}$$

Donde *p*, *q, y m* son enteros positivo tales que:

$$1 \leq p \leq q \leq m$$

La programación lineal es un campo importante en la optimización, por varias razones, muchos problemas prácticos en investigación de operaciones pueden ser expresados como problemas de programación lineal. Algunos casos especiales de programación lineal, tales como problemas de flujos en redes son considerados lo suficientemente importantes como para haber generado abundante investigación en algoritmos especializados para su solución. Algunos algoritmos para solución de otros tipos de problemas de optimización, emplean la programación lineal para solucionar sub-problemas. Históricamente, ideas provenientes de la programación lineal han inspirado muchos de los conceptos centrales de la teoría de optimización, tales como la dualidad, descomposición y la importancia de la convexidad y sus generalizaciones [2].

Puede observarse que se pueden presentar distintos casos de problemas donde en cuanto a las restricciones pueden tener exclusivamente restricciones de igualdad, de desigualdad de un tipo, de desigualdad del otro tipo, desigualdades de ambos tipos, igualdades y desigualdades, entre otros [1].

Se dice que se está en presencia de una solución factible cuando un punto $\mathbf{x}=(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$; que satisface todas las restricciones (4), se denomina solución factible. El conjunto de todas esas soluciones es la región de factibilidad. De igual forma se dice que se está en presencia de una solución óptima cuando un punto factible x' tal que $f(\mathbf{x}) \geq f(\mathbf{x'})$, para cualquier otro punto factible **x**, se denomina una *solución óptima del problema* [1].

El objetivo de los problemas de optimización es encontrar un óptimo global. Sin embargo, las condiciones de optimalidad sólo garantizan, en general, óptimos locales, si estos existen. Los problemas lineales presentan propiedades que hacen posible garantizar el óptimo global [1]:

- Si la región factible (Subconjunto cerrado de IR^n de los valores posibles de las variables de decisión de un programa lineal. Se expresa de forma analítica por un conjunto de restricciones) [9], está acotada, el problema siempre tiene una solución (Esta es una condición suficiente pero no necesaria para que exista una solución).
- El óptimo de un problema de programación lineal es siempre un óptimo global.
- Si x y y son soluciones óptimas de un problema de programación lineal, entonces cualquier combinación (lineal) convexa de lo mismos también es una solución óptima.
- La solución óptima se alcanza siempre, al menos, en un punto extremo de la región factible.

Problema de Programación Lineal en Forma Estándar

Se ha observado que un modelo lineal puede adoptar varias formas: la función objetivo puede ser de máximo o mínimo, y las restricciones pueden ser de mayor o igual, menor o igual o de signo igual, incluso tener restricciones de varios tipos.

La solución y el análisis de un modelo de programación ideal deberán formularse según una forma determinada de programa lineal. Se trata de definir ciertas formulaciones prototipo del programa lineal y de contar con herramientas para poder expresar un programa lineal cualquiera en esa forma prototipo o estándar [9]. En ocasiones, ésta transformación ha de realizarse antes de resolver el *problema de programación lineal* (PPL) y determinar el óptimo. Para describir un PPL en forma estándar son necesarios los tres elementos siguientes [1]:

1. Un vector $\mathbf{c} \in IR^n$
2. Un vector no negativo $\mathbf{b} \in IR^m$
3. Una matriz m x n, **A**.

Con estos elementos, el problema lineal asociado y en forma estándar tiene la siguiente forma.

Minimizar

$$Z = \mathbf{c}^T \mathbf{x} \tag{5}$$

Sujeto a

$$\begin{aligned} \mathbf{Ax} &= \mathbf{b} \\ \mathbf{x} &\geq 0 \end{aligned} \tag{6}$$

Donde $\mathbf{c}^T \mathbf{x}$ indica el producto escalar de los vectores **c** y **x**, **Ax** es el producto de la matriz **A** y el vector **x**, y $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$ hace que todas las componentes de los vectores factibles sean no negativas. Los problemas de programación lineal se estudian normalmente en esta forma. Típicamente, n es mucho mayor que m. En resumen, un problema de programación lineal se dice que está en forma estándar si y sólo si [1]:

1. Es de minimización.
2. Sólo incluye restricciones de igualdad.
3. El vector **b** es no negativo.
4. Las variables **x** son no negativas.

Para que se logre observar el efecto de transformación de PPL en forma estándar se vera como cualquier problema de programación lineal de la forma (3) y (4) puede ser transformado:

Cualquier problema de programación lineal puede expresarse siempre en forma estándar sin más que llevar a cabo una serie de manipulaciones algebraicas [1]:

1. Las variables no restringidas en signo se pueden expresar como diferencias de variables que sí están restringidas en signo, es decir variables no negativas. Si algunas (o todas) de las variables no están restringidas en signo, éstas se pueden expresar mediante sus partes positiva y negativa. Las partes positiva y negativa de la variable x_i, se definen como $x_i^+ = \max\,[0, x_i]$ y $x_i^- = \max\,[0, -x_i]$, respectivamente. Se puede comprobar fácilmente que $x = x_i^+ - x_i^-$, $|x| = x_i^+ + x_i^-$ y que ambas x_i^+ y x_i^- son no negativas. Si el número de variables no restringidas en signo es r, el empleo de la regla anterior supone la necesidad de utilizar r variables adicionales.

2. Las restricciones de desigualdad pueden convertirse en restricciones equivalentes de igualdad introduciendo nuevas variables que se denominan variables de holgura:

   – Si $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots. + a_{in}x_n \leq b_i$

   Entonces, existe una variable $x_{n+1} \geq 0$ tal que:

   $$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots. + a_{in}x_n + x_{n+1} = b_i$$

   – Si $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n \geq b_i$

   Entonces, existe una variable $x_{n+1} \geq 0$ tal que:

   $$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots. + a_{in}x_n - x_{n+1} = b_i$$

3. Un problema de maximización es equivalente a uno de minimización sin más que cambiar el signo de la función objetivo. En particular, maximizar $Z_{max} = \mathbf{c}^T\,\mathbf{x}$ es equivalente a minimizar $Z_{min} = -\mathbf{c}^T\,\mathbf{x}$ si ambos problemas han de cumplir las mismas restricciones. Obsérvese que ambos problemas alcanzan el óptimo en los mismos puntos, pero $Z_{max} = -Z_{min}$.

4. Una restricción con término independiente b no positivo puede reemplazarse por otra equivalente cuyo término independiente es no negativo.

Soluciones Básicas

Se tratara un problema de programación lineal en forma estándar matricial de la forma (5) – (6), donde se supondrá que el rango de la matriz **A** de dimensión $m \times n$ es m donde $m \leq n$, y que el sistema lineal $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ tiene solución. En cualquier otro caso, el problema lineal es equivalente a otro con menos restricciones, o no tiene solución factible, respectivamente [1].

Una submatriz no singular **B** de dimensión $m \times m$ de **A** se denomina *matriz básica o base.* **B** *también se* denomina *matriz básica factible* si y solo si $\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} \geq 0$. Cada matriz básica tiene un vector asociado que se denomina *solución básica*. El procedimiento para calcular esta solución es el siguiente. Sea $\mathbf{x_B}$ el vector de las variables asociadas a las columnas de **A** necesarias para construir **B**. Las variables $\mathbf{x_B}$ se denominan *variables básicas* y el resto se denominan *variables no básicas*. Asignando el valor cero a las variables no básicas [1].

$$\begin{pmatrix}\mathbf{B} & \mathbf{N}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathbf{x_B}\\ \mathbf{0}\end{pmatrix} = \mathbf{b}, \mathbf{B}\mathbf{x_B} = \mathbf{b}, \mathbf{x_B} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} \tag{7}$$

Donde **N** es tal que **A** = (**B N**). Por tanto $\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$ permite obtener la solución básica asociada a **B**. Si **B** es una matriz básica factible, su solución básica se dice que es factible. El número de soluciones básicas factibles de un problema de programación lineal acotado con un numero finito de restricciones es siempre finito, y cada una se corresponde con un punto extremo de la región de factibilidad. En concreto, el teorema siguiente establece la relación entre *soluciones básicas factibles* (SBFs) y puntos extremos [1].

Caracterización de puntos extremos. Sea $S = [\mathbf{x}: \mathbf{Ax} = \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq 0]$, donde **A** es una matriz $m \times n$ de rango m, y **b** es un vector de dimensión m. Un punto **x** es punto extremo de S si y sólo si **A** puede descomponerse en (**B**,**N**) tal que [1]:

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix}\mathbf{x_B}\\ \mathbf{x_N}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}\\ \mathbf{0}\end{pmatrix}$$

Donde **B** es una matriz de dimensión $m \times m$ invertible que satisface $\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} \geq 0$.

Propiedad fundamental de la programación lineal. Si un problema de programación lineal tiene una solución óptima, es además una solución básica factible. Esto puede verse a través de una demostración básica donde [1]:

Una región poliédrica siempre puede escribirse como:

$$\mathbf{x} = \sum_i \rho_i v_i + \sum_j \pi_j w_j + \sum_k \lambda_k q_k$$

Donde:

$$\rho_i \in \mathrm{IR}, \pi_j \in \mathrm{IR}^+, \text{ y } 0 \leq \lambda_k \leq 1;\ \sum_k \lambda_k = 1$$

La región factible de un problema de programación lineal en forma estándar no contiene un espacio vectorial debido a las restricciones $\mathbf{x} \geq 0$. En este caso especial, el conjunto poliédrico puede escribirse como suma de un politopo y un cono; siendo el conjunto mínimo de generadores del politopo el conjunto de puntos extremos, y el mínimo conjunto de generadores del cono el conjunto de direcciones extremas. Por tanto, el valor de la función objetivo a minimizar $Z = \mathbf{c}^T\mathbf{x}$ se puede expresar como [1]:

$$Z = \mathbf{c}^T\mathbf{x} = \sum_j \pi_j \mathbf{c}^T\mathbf{w}_j + \sum_k \lambda_k \mathbf{c}^T\mathbf{q}_k$$

Para que este problema tenga solución acotada, ha de cumplirse que:

$$\mathbf{c}^T\mathbf{w}_j \geq 0, \forall_j$$

Si no es así, el valor de la función objetivo puede disminuirse tanto como se quiera sin más que seleccionar valores adecuados para $\pi_j = 0$ y/o λ_k. Por tanto, el valor de la función objetivo pasa a ser:

$$Z = \mathbf{c}^T\mathbf{x} = \sum_k \lambda_k \mathbf{c}^T\mathbf{q}_k$$

Que alcanza el mínimo para:

$\lambda_s = 1$ para algún s tal que $\mathbf{c}^T \mathbf{q}_s = \min(\mathbf{c}^T \mathbf{q}_1, \ldots, \mathbf{c}^T \mathbf{q}_r)$

Donde r es el número de puntos extremos. Lo anterior implica que el mínimo se alcanza en uno de los puntos extremos $[\mathbf{q}_1,..,\mathbf{q}_r]$ y, empleando el teorema de caracterización de puntos extremos explicado anteriormente, el punto es una solución básica factible [1].

Sensibilidades del Problema con Respecto a los Valores de los Términos Independientes de las Restricciones.

El análisis de sensibilidad es una herramienta especialmente útil cuando no tenemos una certeza absoluta sobre los valores que se han dado a los términos independientes de las restricciones (en muchas ocasiones asociados a la limitación de los recursos) o los coeficientes de la función objetivo [9]. El análisis de sensibilidad propiamente dicho estudia los intervalos para los cuales la modificación de un valor (coeficiente de la función objetivo o término independiente) en el programa lineal, de forma individualizada, no cambia las variables que componen la base de nuestra solución. Hallando, para el rango de valores definido en el intervalo, la evolución de la función objetivo [9]. Por otro lado, el análisis paramétrico, que no es más que un análisis de sensibilidad en profundidad de los términos independientes de las restricciones, estudia las variaciones de la solución óptima más allá de la solución obtenida con los valores iniciales de los parámetros. Se consideran todos los valores posibles del término independiente, desde -∞ a +∞, analizando las variables que entran y salen de la base (cambios de base: Cuando alguno de los parámetros varíe fuera de los intervalos obtenidos por análisis de sensibilidad, tendremos un cambio de base) [9]. A partir de la solución de un PPL se puede extraer información muy relevante sobre sensibilidades. Esto se pone de manifiesto en lo que sigue. Sea $\boldsymbol{B}^*$ la base óptima; entonces:

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_\mathbf{B}^* &= \left(\mathbf{B}^*\right)^{-1}\mathbf{b} \\ z^* &= \mathbf{c}_B^T \mathbf{x}_B^* \end{aligned} \tag{8}$$

Considérese un cambio marginal (es decir, un cambio que no modifica la base) en el vector de términos independientes $\mathbf{b}$:

$$\mathbf{b}^* \rightarrow \mathbf{b}^* + \Delta\mathbf{b} \tag{9}$$

Este cambio en el vector de términos independientes da lugar a cambios en el minimizador y en el valor óptimo de la función objetivo:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_B^* &\rightarrow \mathbf{x}_B^* + \Delta\mathbf{x}_B \\ z^* &\rightarrow z^* + \Delta_Z \end{aligned}$$

Puesto que las ecuaciones (8) son lineales, se puede escribir:

$$\begin{aligned} \Delta\mathbf{x}_B &= \left(\mathbf{B}^*\right)^{-1}\Delta\mathbf{b} \\ \Delta z &= \mathbf{c}_B^T \Delta\mathbf{x}_B \end{aligned}$$

Combinando las ecuaciones anteriores, se obtiene:

$$\Delta z = \mathbf{c}_B^T \Delta\mathbf{x}_B = \mathbf{c}_B^T \left(\mathbf{B}^*\right)^{-1}\Delta\mathbf{b}$$

Definiendo:

$$\boldsymbol{\lambda}^{*T} = \mathbf{c}_B^T\left(\mathbf{B}^*\right)^{-1}$$

La ecuación anterior pasa a:

$$\Delta z = \boldsymbol{\lambda}^{*T}\Delta\mathbf{b}$$

Para una coordenada arbitraria j la expresión anterior tiene la forma:

$$\lambda_j^* = \frac{\Delta z}{\Delta_{\mathbf{b}j}}$$

Que indica que λ_j^* proporciona el cambio en el valor óptimo de la función objetivo como resultado de un cambio marginal en la componente j del vector de términos independientes **b**. Estos parámetros de sensibilidad juegan un papel fundamental en aplicaciones de ingeniería y científicas. Como se vera en las secciones siguientes, los parámetros de sensibilidad son de hecho variables duales [1].

Teorema de Dualidad

Dado un modelo lineal determinado, se puede definir otro modelo lineal que permite obtener propiedades interesantes del primero y que será su dual. La solución del modelo dual permite obtener interesantes resultados, relativos al análisis de sensibilidad de los términos independientes. Más concretamente, para los rangos de valores de los términos independientes para los que se mantiene la base óptima (que podemos conocer mediante el análisis de sensibilidad), la solución del dual permite conocer la variación de la función objetivo por unidad incrementada del término independiente de la restricción [9]. Tras formular el problema dual de un problema de programación lineal, se establece la relación matemática entre ambos. Se emplean diversos ejemplos para ilustrar el importante concepto de la dualidad. Dado un problema de programación lineal, denominado *problema primal*, existe otro problema de programación lineal, denominado *problema dual*, íntimamente relacionado con él. Se dice que ambos problemas son mutuamente duales bajo ciertas hipótesis, los problemas primal y dual dan lugar al mismo valor óptimo de la función objetivo, y por tanto se puede resolver indirectamente el problema primal resolviendo el problema dual. Esto puede suponer una ventaja computacional relevante [1].

Dado el problema de programación lineal

Minimizar: $Z = \mathbf{c}^T\mathbf{x}$

Sujeta a:

$$\begin{aligned} \mathbf{Ax} &\geq \mathbf{b} \\ \mathbf{x} &\geq \mathbf{0} \end{aligned} \tag{10}$$

Su problema dual es maximizar:

$$Z = \mathbf{b}^T\mathbf{y}$$

Sujeta a:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^T\mathbf{y} &\leq \mathbf{c} \\ \mathbf{y} &\geq 0 \end{aligned} \tag{11}$$

Donde $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_m)^T$ se denominan variables duales.

Se denomina al *primer problema primal*, y al segundo, su *dual*. Donde se puede apreciar que los mismos elementos (la matriz **A**, y los vectores **b** y **c** configuran ambos problemas). El problema primal no se ha escrito en forma estándar, sino en una forma que permite apreciar la simetría entre ambos problemas, y mostrar así que el dual del dual es el primal [1]. La dualidad es una relación simétrica, esto es, si el problema ***D*** es el dual del problema ***P***, entonces ***P*** es el dual de ***D*** [1].

Esto puede apreciarse a través del siguiente ejemplo escribiendo el problema dual anterior como un problema de minimización con restricciones de la forma $\geq$ [1].

Minimizar:

$$Z = -\mathbf{b}^T \mathbf{y} \tag{23}$$

Sujeta a:

$$\begin{aligned} -\mathbf{A}^T \mathbf{y} &\geq -\mathbf{c} \\ \mathbf{y} &\geq 0 \end{aligned} \tag{12}$$

Entonces su dual es maximizar:

$$Z = -\mathbf{c}^T \mathbf{x}$$

Sujeta a:

$$\begin{aligned} -\mathbf{A}\mathbf{x} &\leq -\mathbf{b} \\ \mathbf{x} &\geq 0 \end{aligned} \tag{13}$$

Que es equivalente al problema primal original.

Obtención del dual a partir del primal en forma estándar

Se obtiene el problema dual a partir del problema primal en forma estándar. Para hacer esto basta con aplicar la relación primal-dual como se explicó en tema anterior de dualidad. Considérese el PPL [1]:

Minimizar: $Z = \mathbf{c}^T \mathbf{x}$

Sujeta a:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}\mathbf{x} &= \mathbf{b} \\ \mathbf{x} &\geq \mathbf{0} \end{aligned}$$

La igualdad $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ puede reemplazarse por las desigualdades $\mathbf{Ax} \geq \mathbf{b}$ y $-\mathbf{Ax} \geq -\mathbf{b}$. Entonces, puede escribirse el problema como:

Minimizar

$$Z = \mathbf{c}^T \mathbf{x}$$

Sujeta a:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{A} \\ -\mathbf{A} \end{pmatrix} \mathbf{x} \geq \begin{pmatrix} \mathbf{b} \\ -\mathbf{b} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$$

El dual de este problema es:

$$Z = \mathbf{b}^T \mathbf{y}^{(1)} - \mathbf{b}^T \mathbf{y}^{(2)} = \mathbf{b}^T \mathbf{y}$$

Donde $\mathbf{y} = \mathbf{y}^{(1)} - \mathbf{y}^{(2)}$ no está restringida en signo, sujeta a:

$$\left(\mathbf{A}^{\mathbf{T}} - \mathbf{A}^{\mathbf{T}}\right)\begin{pmatrix}\mathbf{y}^{(1)} \\ \mathbf{y}^{(2)}\end{pmatrix} = \mathbf{A}^{T}\mathbf{y} \leq \mathbf{c}$$

Esta es la forma del problema dual cuando el problema primal se expresa en forma estándar [1].

Obtención del problema dual

Un problema de programación lineal de la forma (10) tiene asociado un problema dual que puede formularse según las reglas siguientes [1]:

- *Regla 1*. Una restricción de igualdad en el primal (dual) hace que la correspondiente variable dual (primal) no esté restringida en signo.
- *Regla 2*. Una restricción de desigualdad ≥ (≤) en el primal (dual) da lugar a una variable dual (primal) no negativa.
- *Regla 3*. Una restricción de desigualdad ≤ (≥) en el primal (dual) da lugar a una variable dual (primal) no positiva.
- *Regla 4*. Una variable no negativa primal (dual) da lugar a una restricción de desigualdad ≤ (≥) en el problema dual (primal).
- *Regla 5*. Una variable primal (dual) no positiva da lugar a una restricción de desigualdad ≥ (≤) en el problema dual (primal).
- *Regla 6*. Una variable no restringida en signo del problema primal (dual) da lugar a una restricción de igualdad en el dual (primal).

Ejemplo de Problema Dual del problema de programación lineal [1]:

Minimizar: $Z = x_1 + x_2 + x_3$

Sujeta a:

$$\begin{aligned} &2x_1 + x_2 \geq 3 \\ &x_1 - x_3 = 2 \\ &x_3 \geq 0 \end{aligned} \qquad (14)$$

Es maximizar: $Z = 3y_1 + 2y_2$

Sujeta a:

$$\begin{aligned} &2y_1 + y_2 = 1 \\ &y_1 = 1 \\ &-y_2 \leq -1 \\ &y_1 \geq 0 \end{aligned} \qquad (15)$$

Para obtenerlo se aplican las reglas anteriores de la forma siguiente [1]:

- *Regla 1*. Puesto que la segunda restricción del problema primal es de igualdad, la segunda variable dual y_2 no está restringida en signo.
- *Regla 2*. Puesto que la primera restricción del problema primal es de desigualdad ≥, la primera variable dual y_1 es no negativa.
- *Regla 3*. Puesto que la tercera variable primal x_3 está restringida en signo, la tercera restricción dual es de desigualdad ≤.
- *Regla 4.* Puesto que las variables primales primera y segunda x_1 y x_2 no están restringidas en signo, las restricciones duales primera y segunda son de igualdad.

Aplicando las mismas reglas, se puede obtener el problema primal del dual, lo que se muestra a continuación [1]:

– *Regla 1*. Dado que las restricciones primera y segunda del problema dual son de igualdad, las variables primales primera y segunda x_1 y x_2 no están restringidas en signo.
– *Regla 2.* Dado que a la tercera restricción del problema dual es de desigualdad ≤, la tercera variable primal x_3 es no negativa.
– *Regla 3*. Dado que la primera variable dual y_1 está restringida en signo, la primera restricción primal es de desigualdad ≥.
– *Regla 4.* Puesto que la segunda variable dual y_2 no está restringida en signo, la segunda restricción primal es de igualdad.

Teoremas de dualidad

La importancia del problema dual se establece en los siguientes teoremas [1].

Lema de dualidad débil. Sea ***P*** un PPL, y ***D*** su dual. Sea **x** una solución factible de ***P*** e **y** una solución factible de ***D***. Entonces:

$$\mathbf{b}^T\mathbf{y} \le \mathbf{c}^T\mathbf{x}$$

Si **x** e **y** son factibles respectivamente para ***P*** y ***D***, entonces:

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}, \quad \mathbf{x} \ge 0, \quad \mathbf{A}^T\mathbf{y} \le \mathbf{c}$$

Obsérvese que debido a la no negatividad de **x**,

$$\mathbf{b}^T\mathbf{y} = \mathbf{x}^T\mathbf{A}^T\mathbf{y} \le \mathbf{x}^T\mathbf{c} = \mathbf{c}^T\mathbf{x}$$

Si $\boldsymbol{b}^T\mathbf{y}' = \mathbf{c}^T\mathbf{x}'$ para dos vectores **x'** e **y'**, factibles en ***P*** y ***D***, respectivamente, entonces:

$$\mathbf{c}^T\mathbf{x}' = \mathbf{b}^T\mathbf{y}' \le \max_{\mathbf{y}}\left[\mathbf{b}^T\mathbf{y} \mid \mathbf{A}^T\mathbf{y} \le \mathbf{c}\right] \le \min_{\mathbf{x}}\left[\mathbf{c}^T\mathbf{x} \mid \mathbf{Ax} = \mathbf{b}, \mathbf{x} \ge 0\right] \le \mathbf{c}^T\mathbf{x}' = \mathbf{b}^T\mathbf{y}'$$

La demostración es simple si se comprueba que:

$$\max_{\mathbf{y}}\left[\mathbf{b}^T\mathbf{y} \mid \mathbf{A}^T\mathbf{y} \le \mathbf{c}\right] \le \min_{\mathbf{x}}\left[\mathbf{c}^T\mathbf{x} \mid \mathbf{Ax} = \mathbf{b}, \mathbf{x} \ge 0\right]$$

Por tanto, todas las desigualdades son de hecho igualdades *y* **x***'* e **y***'* deben ser soluciones óptimas de ***P*** y ***D*** respectivamente, tal como establecía la hipótesis inicial. El teorema de dualidad fuerte establece que los problemas ***P*** y ***D*** tienen, en general, soluciones óptimas simultáneamente [1].

Teorema de dualidad. Si **x'** es una solución óptima de **P,** existe una solución óptima **y'** para ***D,*** y el mínimo de ***P*** y el máximo de ***D*** presentan el mismo valor de la función objetivo $\mathbf{b}^T\mathbf{y}' = \mathbf{c}^T\mathbf{x}'$. Recíprocamente, si **y'** es una solución óptima de ***D,*** existe una solución óptima de ***P***, **x'**, y nuevamente los valores mínimo *y* máximo de ***P*** *y* ***D*** dan lugar a un valor común de la función objetivo $\mathbf{b}^T\mathbf{y}' = \mathbf{c}^T\mathbf{x}'$. En otro caso, o un conjunto factible está vacío o lo están los dos [1].

En resumen, si ***P*** es un PPL y ***D*** es su dual, una de las siguientes afirmaciones es cierta [1]:

1. Ambos problemas tienen solución óptima y los valores óptimos de las funciones objetivo respectivos coinciden.
2. Uno de los problemas no está acotado y el otro tiene una región factible vacía.

Regiones Factibles y Soluciones Óptimas

Dos de los conceptos más fundamentales en la programación lineal son el de región factible y de solución optima de un problema. Se llamara punto a la especificación de un valor para cada variable de decisión.

La *región factible para un PPL es el conjunto de puntos que satisfacen todas las restricciones de un problema de PL*.

En el caso de un problema de maximización, una solución óptima del PPL es un punto de la región factible que esta asociado al mayor valor posible de la función objetivo. Similarmente, para un problema de minimización, una solución óptima es un punto que esta asociado al menor valor posible de la función objetivo.

La mayoría de los PPL tienen solo una solución óptima. Sin embargo, existen muchos PPL que no poseen solución óptima o bien poseen varios o infinitos valores óptimos.

Métodos de Solución de Programas Lineales

Una vez que se ha conseguido representar una situación mediante un modelo lineal, es preciso encontrar y explotar la solución de ese modelo. Existen varias formas de encontrar esta solución [9]:

a) En el caso (poco frecuente) en el que se haya representado el modelo con dos variables de decisión, puede resolverse éste gráficamente. La *solución gráfica* de un modelo lineal tiene fundamentalmente un interés pedagógico, dado que permite introducir diversos conceptos asociados a los modelos lineales de forma gráfica e intuitiva.

b) Para modelos pequeños o medianos (hasta decenas de miles de variables y restricciones) resulta adecuado el *algoritmo símplex*, que consiste en explorar de forma inteligente el conjunto de soluciones posibles, de manera que se alcance el óptimo explorando un subconjunto pequeño de éstas. Existen en el mercado programas informáticos que utilizan el método símplex para resolver modelos lineales. En la mayoría de las ocasiones, suele ser accesible una versión gratuita (*freeware*) de dichos programas. La única diferencia con los programas de pago es que tienen limitado el número de variables y restricciones, de manera que su utilidad es didáctica: la explotación comercial obliga a usar versiones de pago de esos programas, con mayor capacidad de tratamiento de variables y restricciones.

c) Para modelos de gran tamaño, el *procedimiento del punto interior*, técnica exportada de la programación no lineal, permite en ocasiones obtener una excelente aproximación a la solución de forma más rápida que el algoritmo símplex.

Método Gráfico

Sistemas de Desigualdades Lineales

Dentro de las características del problema de PL, se involucra siempre un sistema de restricciones lineales o desigualdades lineales, las cuales representan la relación entre las variables en forma de desigualdad.

Es importante, entonces, poder graficar las restricciones de un problema para tener una idea clara de la región factible de solución para el problema. La mayoría de los problemas de PL tienen más de una restricción. Toda restricción lineal expresada como una desigualdad lineal claramente define un semiplano.

Por ejemplo el semiplano $y \le x$ es el semiplano superior a la línea $y = x$ mientras, el semiplano $y \ge x$ es el semiplano inferior a la línea $y = x$. La intersección de un número finito de semiplanos determina una región geométrica llamada *Poliedro Convexo* (polígono convexo).

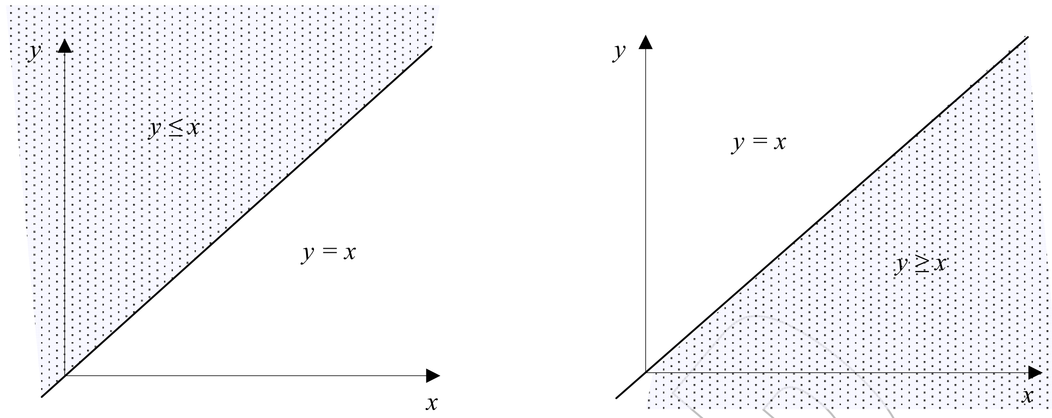


Figura 1. Grafica representativa a los semiplanos que define toda restricción lineal expresada como una desigualdad lineal.

Se desea graficar el semiplano $y < 2x + 3$. Esto es el conjunto de puntos que están por debajo de la línea $y=2x + 3$.

Para graficarlo, se grafica la línea $y = 2x +3$ con el método rápido.
Sea $x = 0 = y = 2(0) + 3$ } Punto (0,3)

Sea $y = 0 = 2x + 3$
$2x = -3$
$x = -3/2$ } Punto (-3/2,0)

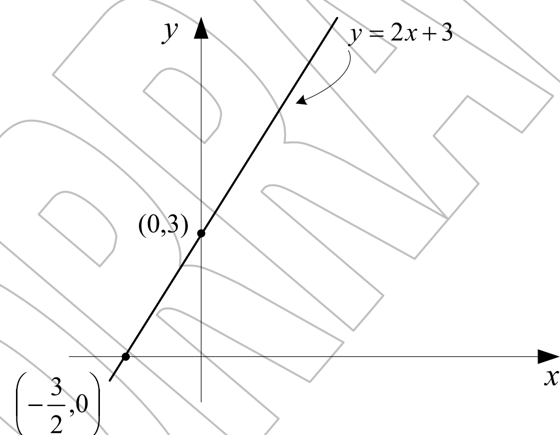


Figura 2. Grafica representativa a la línea $y = 2x + 3$

Ahora bien $y > 2x + 3$ es el semiplano que está por encima de la recta $y = 2x + 3$, se le llama *semiplano abierto*.

Si la recta está incluida, se representa la gráfica de la desigualdad $y > 2x + 3$ como un semiplano y, en ese caso, se le llama a la región *semiplano cerrado*.

Método Gráfico de Solución a Problemas de PL

El Método Gráfico, es un método de prueba y error hasta llegar a determinar el óptimo de la función objetivo, probando todos y cada uno de los extremos o vértices del polígono de la región factible.

En esencia, funciona igual que el método simplex como un algoritmo iterativo (un procedimiento que sigue ciertos pasos ordenados en forma iterativa o repetitiva).

El Método Gráfico consiste en:

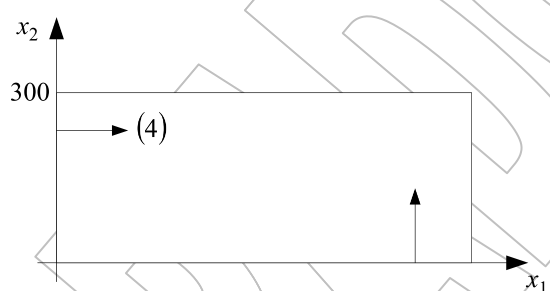
- *Paso Inicial*: Inicio en una solución factible en un vértice.
- *Paso Iterativo*: Traslado a una mejor solución factible en un vértice adyacente.
- *Prueba de Optimalidad*: La solución factible en un vértice es óptima cuando ninguna de las soluciones en vértices adyacentes a ella sea mejor.

Si una solución en un vértice es igual o mejor (según el valor de Z) que todas las soluciones factibles en los vértices adyacentes a ella, entonces es igual o mejor que todas las demás soluciones en los vértices; es decir, es óptima.

Graficación de las Restricciones de un Programa Lineal

El método gráfico para resolver un programa lineal con dos variables se comprende mejor concentrándose primero en las restricciones y posteriormente en la función objetivo. Para determinar que valores de x_1 y x_2 satisfacen todas las restricciones, se considera una restricción a la vez. Cada restricción permite ciertos valores de x_1 y x_2 que satisfacen la restricción. Estos valores se denominan valores factibles. Aquellos valores que no satisfacen la restricción se llaman valores no factibles.

Por ejemplo, una restricción $x_1 \geq 0$ y $x_2 \geq 0$, permite sólo valores no negativos para x_1 y x_2. Geométricamente, estas dos restricciones juntas permiten valores factibles para las variables que están a la derecha del eje x_2 y encima del eje x_1 como se ilustra en la figura siguiente.



Cabe destacar, que se buscan aquellos valores de x_1 y x_2 que satisfacen todas las restricciones, no sólo las de no negatividad.

Para ver gráficamente qué valores son factibles para la restricción, se deben encontrar aquellos valores de x_1 y x_2 que satisfacen la igualdad.

Sin embargo, los valores factibles para la restricción consisten en aquellos valores para los cuales la sección izquierda de la función cumple con la parte derecha. Lo que se descubrirá mediante ensayo y error es que todos los puntos de la línea de la figura dan origen a valores factibles para x_1 y x_2, como cualquier punto en uno de los dos lados de la línea resultante. La única pregunta es ¿Qué lado?, la respuesta a ella se encuentra eligiendo cualquier punto que no esté en la línea y si los valores x_1 y x_2 correspondientes satisfacen la restricción. Si así es, entonces este punto está en el lado factible; de otra manera, el punto no está en el lado factible.

Maximización o Minimización

Para un problema de maximización, una solución óptima para PL, es un punto de la región factible con el mayor valor de la función objetivo. Similarmente, para un problema de minimización, una solución óptima corresponde a un punto de la región factible con el menor valor de la función objetivo. Esto quiere decir, que cualquier problema de PL que tiene una solución óptima tiene un punto extremo o vértice que es el óptimo. En este caso el óptimo es único.

Si existen soluciones óptimas múltiples, entonces al menos dos de ellas deben ser soluciones factibles en vértices adyacentes.

Se definen tres alternativas de solución a problemas de PL que son:

1. Un número infinito de soluciones óptimas (soluciones Múltiples).
2. No tienen solución factible.
3. Problemas no-acotados.

Ventajas y Desventajas del Método Gráfico

Después de leer lo anterior, se observa que el *Método Gráfico es sencillo y rápido para optimizar funciones de utilidad o minimizar funciones de costo*.

Sin embargo, tiene una gran limitación. *Solamente se puede usar para problemas que utilizan únicamente dos variables de decisión*. La mayoría de problemas de optimización que se confrontan en Mercadotecnia, procesos de producción, Administración y Planificación, juegan con una gran cantidad de variables en sus modelos matemáticos de Programación Lineal.

Es por ello, en caso que sea necesario resolver problemas con más de 2 variables, que la única alternativa de solución que tenemos es el algoritmo Simplex.

Método Simplex

El *método simplex* es un procedimiento matricial para resolver problemas lineales expresados en forma estándar.

Empezando con x_0, el método localiza sucesivamente otras soluciones factibles básicas que tienen mejores valores del objetivo, hasta obtener la solución óptima.

Desarrollo del método simplex

Es necesario considerar únicamente los puntos extremos (o esquina) del espacio de soluciones.

Representación del espacio de soluciones con la forma estándar

El desarrollo del método simplex esta basado en el uso de la forma estándar (en la cual todas las restricciones se convierten en ecuaciones) a fin de hacer la transición de las representaciones gráficas a las algebraicas.

Un punto extremo factible, se define como una solución básica factible.

Propiedad fundamental

Los puntos extremos factibles de un programa lineal son totalmente determinados por las soluciones básicas factibles de las ecuaciones que lo definen.

La propiedad fundamental muestra cómo la definición geométrica de un punto extremo del espacio de soluciones se traduce algebraicamente como las soluciones básicas de las ecuaciones que representan el programa lineal.

Condiciones de optimización y factibilidad del método simplex

La solución óptima para un programa lineal general con m ecuaciones y n incógnitas puede obtenerse resolviendo $C_m^n = n!/\ [m!\ (n\text{-}m)!]$ conjunto de ecuaciones simultáneas. Este procedimiento es ineficiente. Primero, el número de soluciones básicas posibles puede ser demasiado grande. Segundo, muchas de estas soluciones pueden ser no factibles o no existentes. Tercero, la función objetivo juega un papel pasivo en el cálculo, ya que es utilizada únicamente después de todas las soluciones básicas factibles han sido determinadas [5].

El método simplex está diseñado específicamente para evitar estas ineficiencias. El enfoque consiste en partir de una solución *básica factible* (esto es, un punto extremo factible) y luego pasar sucesivamente a través de una sucesión de soluciones *básicas factibles* (no redundantes), de tal manera que cada nueva solución tenga la facultad de mejorar el valor de la función objetivo.

La base del método simplex que garantiza generar tal sucesión de soluciones básicas está formada por dos condiciones fundamentales.

La condición de optimalidad asegura que nunca se encontrará una solución inferior (relativa al punto de solución actual).

La condición de factibilidad garantiza que partiendo de una solución básica factible, únicamente se encontrarán durante el cálculo soluciones básicas factibles.

Para ayudar a desarrollar las dos condiciones, el programa lineal en forma estándar se presenta en una forma tabular conveniente. La representación gráfica da una explicación particularmente lúcida de la condición de factibilidad.

Es mucho más fácil operar con igualdades que con desigualdades. Por tanto, se convierten a ecuaciones las restricciones agregando variables de holgura (S_1, S_2, S_3,…, S_n), por ejemplo: $2x_1 + 3x_2 \leq 6$, para convertirla a ecuación se le agrega una variable de holgura y se obtiene $2x_1 + 3x_2 + S_1 = 6$, y estás variables de holgura son enumeradas por el orden correlativo de las restricciones del problema. Es claro que para que el método sea válido, debemos especificar que las variables de holgura sean no negativas.

Las variables de holgura proporcionan una solución obvia de inicio en este caso porque (1) sus coeficientes en las restricciones forman una matriz identidad, donde los elementos diagonales son unos y todos los elementos restantes son ceros y (2) las constantes del lado derecho de las ecuaciones siempre son no negativas (propiedad de la forma estándar).

Básicas	x_0	x_1	x_2	S_1	S_2	S_3	S_4	Solución	
x_0	**1**	-4	-3	0	0	0	0	0	Ecuación x_0
S_1	0	2	3	**1**	0	0	0	6	Ecuación S_1
S_2	0	-3	2	0	**1**	0	0	3	Ecuación S_2
S_3	0	0	2	0	0	**1**	0	5	Ecuación S_3
S_4	0	2	1	0	0	0	**1**	4	Ecuación S_4

La columna titulada *Básicas* contiene las variables básicas (actuales) S_1, S_2, S_3 y S_4. La columna *Solución* da los valores actuales de las variables básicas. Cada ecuación en la tabla estará identificada por la variable asociada en la columna marcada Básica. Las variables no básicas actuales son aquellas que no aparecen en la columna *Básica* y sus valores son cero.

Las columnas asociadas a las variables básicas de inicio siempre aparecen inmediatamente a la izquierda de la columna Solución y sus coeficientes de restricciones constituyen una matriz identidad.

El paso siguiente es determinar una nueva solución básica factible (punto extremo) con un valor mejorado de la función objetivo. El método simplex hace esto eligiendo una variable actual no básica que se va a aumentar arriba de cero siempre que su coeficiente en la función objetivo tenga la virtud de mejorar el valor de x_0. Ya que un punto extremo debe tener dos variables no básicas, una de las variables básicas actuales debe hacerse no básica en el nivel cero siempre que la nueva solución sea factible. La variable no básica actual debe hacerse básica; usualmente se le conoce como la variable que entra y está determinada por la condición de optimizar. La variable básica actual que va a ser no básica se conoce como la variable que sale y está determinada por la condición de factibilidad.

La condición de optimizar estipula que la variable que entra será elegida como la variable no básica que tenga un coeficiente negativo en la ecuación x_0 de la tabla. Este paso sigue ya que es equivalente a elegir un coeficiente positivo en la función objetivo original (cuando se está maximizando). Después se desarrolla la condición de factibilidad.

La conclusión general entonces, es que si el coeficiente de restricción bajo la variable de entrada es negativo, o bien, 0, la restricción correspondiente no intercepta la dirección no negativa del eje que defina la variable de entrada y entonces no tendrá efecto sobre la factibilidad.

Después de determinar la variable que entra y la que sale, el paso siguiente es modificar la tabla de tal manera que la columna Solución directamente dará los nuevos valores de x_0 y las (nuevas) variables básicas. Este resultado se logra aplicando el Método de Gauss-Jordan (o de operaciones de renglón) el cual elimina (realmente substituye) la variable que entra de todas las ecuaciones de la tabla, excepto aquella que está asociada a la variable de salida.

El coeficiente bajo la variable de entrada correspondiente a la relación mínima se conoce como el *elemento pivote*. El primer paso en la eliminación Gauss-Jordan es dividir la ecuación pivote entre el elemento pivote y reemplazar la ecuación pivote como una variable básica por la variable que entra.

La única diferencia entre maximización y minimización ocurre en la condición de optimizar: En minimización la variable que entra es aquella con el mayor coeficiente *positivo* en la función objetivo. La condición de factibilidad permanece igual ya que depende de las restricciones y no de la función objetivo.

Condición de Optimalidad:

Dada la ecuación x_0 expresada en función de las variables no básicas solamente, se elige la variable que entra en maximización (minimización) como la variable no básica que tiene el mayor coeficiente negativo (el más positivo) en la ecuación x_0. Un empate entre dos variables no básicas debe descomponerse arbitrariamente. Cuando todos los coeficientes del lado izquierdo de la ecuación x_0 son no negativos (no positivos) se ha llegado al óptimo.

Condición de Factibilidad

La variable que sale es la variable básica correspondiente al cociente más pequeño de los valores actuales de las variables básicas entre los coeficientes positivos de las restricciones de la variable que entra. Un empate puede romperse arbitrariamente.

Pasos Del Método Simplex

- *Paso 1*: Se localiza el número más negativo en el renglón inferior del tablero simplex, incluyendo la última columna. A la columna en la cual aparece este número, se le denominará columna de trabajo. Si existe más de una posibilidad en la selección del número más negativo, se selecciona sólo uno.
- *Paso 2*: Se obtienen razones dividiendo cada número positivo de la columna de trabajo, excluyendo el último renglón, entre el elemento en el mismo renglón y en la última columna. Al elemento de la columna de trabajo que dé la razón más pequeña, se le denomina elemento pivote. Si más de un elemento da la misma razón más pequeña, se selecciona uno de ellos. Si ningún elemento en la columna de trabajo es positivo, el problema no tiene solución.
- *Paso 3*: Utilice operaciones elementales de renglones para convertir el elemento pivote a 1 y reducir después a todos los demás elementos en la columna de trabajo a 0 [2].
- *Paso 4*: Se reemplaza la variable x en el renglón pivote y en la primera columna por la variable x en el primer renglón y en la columna pivote. Esta nueva primera columna es ahora el conjunto de variables básicas.
- *Paso 5*: Se repiten los pasos 1 al 4 hasta que no queden números negativos en el último renglón, excluyendo a la última columna.
- *Paso 6*: La solución óptima se obtiene asignando a cada variable de la primera columna aquel valor en el renglón correspondiente y en la última columna. A todas las otras variables se les asigna el valor cero. El valor asociado z^*, último valor óptimo de la función objetivo, es el número en el último renglón y última columna para un problema de maximización, pero es el negativo de este número para un problema de minimización.

Programación No Lineal

La programación lineal es una de las mayores contribuciones al campo de la toma científica de decisiones. Su versatilidad y adaptabilidad ha hecho que este modelo tenga aplicación en casi todos los campos de la ingeniería y de la ciencia. No obstante, ciertas clases de problemas requieren tener en cuenta los aspectos no lineales del mismo. Esta necesidad ha conducido a investigar tanto los aspectos teóricos como los computacionales de los problemas de programación no lineal [1].

Aunque los problemas de programación lineal son muy comunes y cubren un amplio rango de aplicaciones, en la vida real se tiene que enfrentar con cierta frecuencia a otro tipo de problemas que no son lineales. Cuando el conjunto de restricciones, la función objetivo, o ambos, son no lineales, se dice que se trata de un *problema de programación no lineal* (PPNL) [1].

Un problema de programación no lineal (PPNL) puede ser expresado de la forma:

Minimice $f(\mathbf{x})$

Sujeto a:

$g_i(\mathbf{x}) = 0$ de $_i = 1, ..., m_1$ donde $m_1 \geq 0$
$h_j(\mathbf{x}) \geq 0$ de $_j = m_1+1, ..., m$ donde $m \geq m_1$

Es decir hay una función f de valor escalar, de varias variables (**x** es un vector), que se busca reducir al mínimo sujeta a una o más funciones que sirven para limitar o definir los valores de éstas variables. La función f es la función objetivo, mientras que el resto de las funciones son las restricciones. Si se busca la maximización de la función, esto se logra multiplicando a f por -1 [8].

Uno de los mayores desafíos en la programación no lineal es que algunos problemas exponen "*grados óptimos locales*"; es decir las soluciones falsas que simplemente satisfacen las exigencias sobre las derivadas de las funciones. Los algoritmos que proponen vencer esta dificultad son llamados "*Optimización Global*" [8].

Programación Lineal Entera-Mixta

En algunas situaciones que pueden representarse con modelos lineales, se encontrara con que sólo tienen sentido aquellas soluciones de la región factible en la que toda o algunas de las variables de decisión sean números enteros. Estas situaciones pueden representarse mediante modelos matemáticos ligeramente diferentes de la programación lineal. Si todas las variables de decisión deben ser enteras, tenemos un problema de *programación lineal entera*. Si sólo algunas variables de decisión deben ser enteras, pudiendo ser reales las demás, se trata de un problema de *programación lineal mixta*.

En algunos casos, todas o algunas de las variables enteras sólo pueden tomar los valores de 0 o 1. A estas variables se les llama *variables binarias*. De este modo tenemos tres tipos de variables:

a) Variables no enteras o reales
b) Variables enteras
c) Variables binarias

Un problema de *programación lineal entera-mixta* (PPLEM) es un problema de programación lineal (PPL) en el que algunas de las variables son enteras. Si todas las variables enteras son binarias (0/1), el problema se denomina *problema de programación lineal entera-mixta 0/1* (PPLEM 0/1). Si, por otra parte, todas las variables son enteras, el problema se denomina problema de programación lineal entera estricta (PPLEE) [1].

Entre las técnicas existentes para el desarrollo de estos problemas de programación lineal entera-mixta se encuentran las técnicas de *ramificación y acotación* (RA) y la técnica de los *cortes de Gomory* (CG). La técnica RA es la que presenta excelentes propiedades computacionales por lo que es la que se emplea con mayor frecuencia. Sin embargo, recientemente se han desarrollado técnicas híbridas, denominadas de ramificación y cortes, que son más eficaces [1].

Un PPLEM general se formula en forma estándar minimizando:

$$Z = \sum_{j=1}^{n} cjxj$$

Sujeto a:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i;\ i = 1,2,...,m$$

$$x_j \geq 0;\ \ j = 1,2,...,n \quad x_j \in \text{IN}; \text{Para todo o algunos } j = 1,2,...,n$$

Donde IN se emplea para referirse al conjunto (0,1, 2,…).

Referencias bibliográficas

[1] Enrique Castillo, Antonio J. Conejo, Pablo Pedregal, Ricardo García y Natalia Alguacil "*Formulación y Resolución de Modelos de Programación Matemática en Ingeniería y Ciencia*".20 de febrero de 2002.
[2] Página Personal de Ramón Medina (Online) Disponible en: http://www.ramonmedina.name/files/todec_g.pdf.
[3] Marrero, F. (2004). "*Herramientas para la toma de decisiones: La programación lineal*" (online) disponible en: http://www.ilustrados.com/publicaciones/EpZVVyAEZEviGjBikU.php.
[4] Optimization Toolbox For Use with MATLAB®. **"***Optimization Toolbox User's Guide*". Version 3.
[5] Hamdy A. Taha. "*Investigación de operaciones, una introducción*". Representaciones y servicios de Ingeniería, S. A., México. Págs. 42-55.
[6] Richard Bronson. "*Teoría y problemas de investigación de operaciones*"**.** McGraw Hill. Págs. 32-33.
[7] Hossein Arsham. "*Modelos Deterministas: Optimización Lineal*", 1994 (Online) Disponible en: http://home.ubalt.edu/ntsbarsh/opre640S/SpanishD.htm.
[8] Nonlinear Programming, Online disponible en : http://www-unix.mcs.anl.gov/otc/Guide/faq/nonlinear-programming-faq.html.
[9] José María Sallán Leyes, Albert Suñé Torrents, Joan Baptista y Fonollosa Guardiet. "*Métodos cuantitativos en organización industrial I*". Edicions de la Universitat Politècnica de Catalunya, SL. Primera edición: febrero de 2002.
[10] Singiresu S. Rao. "*ENGINEERING OPTIMIZATION Theory and Practice*" .By John Wiley & Sons, Inc., Wiley Eastern Limited, Publishers, and New Age International Publishers, Ltd. Third edition. 1996